普通高等教育“十一五”规划教材

鲁棒控制基础理论

苏宏业 等 编著



普通高等教育“十一五”规划教材

鲁棒控制基础理论

苏宏业 等 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从鲁棒控制理论最基本的定义和概念人手，引用了 Doyle 的《反馈控制理论》和周克敏的《鲁棒和最优控制》的一些基本理论和方法，并根据作者多年鲁棒控制理论的教学经验以及历届学生对鲁棒控制课程的反馈信息，结合作者在鲁棒控制理论所取得的研究成果，从频域和时域两个角度，由浅入深、循序渐进地阐述了鲁棒控制的基本理论和方法。本书主要分两个部分，频域部分主要来源于前人的研究成果，是对前人研究成果的归纳与总结；时域部分主要来源于作者的部分研究成果，是对作者研究成果的提炼和升华。

本书可用于控制科学与控制工程专业以及自动化、机械、电子、通信、计算机、数学等相关专业的研究生教材，也可作为从事鲁棒控制研究、教学人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制基础理论/苏宏业等编著；—北京：科学出版社，2010
(普通高等教育“十一五”规划教材)
ISBN 978-7-03-029118-9
Ⅰ.鲁… Ⅱ.苏… Ⅲ.鲁棒控制-研究 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 190229 号

责任编辑：姚庆爽／责任校对：张怡君
责任印制：赵 博／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 10 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2010 年 10 月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：1—3 000 字数：314 000

定价：45.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

自 1972 年加拿大多伦多大学 Davison 教授首次提出鲁棒控制概念以来，鲁棒控制理论就吸引了学者们的广泛关注。通常意义下，鲁棒控制就是要试图描述被控对象模型的不确定性，并估计在某些特定界限下达到控制目标所留有的自由度。鲁棒控制研究的主要内容是系统存在模型不确定性和外界干扰时如何设计控制器使得相应的闭环系统具有期望的性能。至今，鲁棒控制理论也是控制理论与应用领域里的热点研究方向之一。几十年来，鲁棒控制研究成果浩如烟海，不计其数。最有影响力的当属 Zames 的 H_∞ 控制理论，Doyle 的反馈控制理论，以及 San Francisco 的鲁棒自适应控制理论。现在，鲁棒控制理论和方法的研究已经形成了几个重要分支，并建立了各自完整的理论体系，如：Lyapunov–Razumikhin 与 Lyapunov-Krasovskii 鲁棒稳定性理论，Kharitonov 区间理论，H-Infinity 控制理论，结构奇异值理论，参数空间法，多项式方法，Riccati 不等式、线性矩阵不等式方法等。

前人对鲁棒控制理论和方法做了系统深入的研究和总结，相应的鲁棒控制著作层出不穷，如：Doyle 的《反馈控制理论》，San Francisco 的《鲁棒自适应控制》，周克敏的《鲁棒和最优控制》，Anderson 的《不确定模型和鲁棒控制》，Goodwin 的《鲁棒控制系统设计》，Hale 的《泛函微分方程导论》，Boyd 的《线性矩阵不等式》等，这些著作建立在鲁棒控制各个分支的研究基础之上，对鲁棒控制理论和方法的各个层面做了深入的阐述，是鲁棒控制理论赖以发展的基石和瑰宝，也是鲁棒控制研究最重要的工具书和基础书籍，对后来的研究者产生了巨大而深远的影响，使得鲁棒控制理论研究领域一直保持着活力与挑战性。随着控制对象的日益复杂、控制目标的不断提高以及相关技术的飞速发展，鲁棒控制理论必将得到快速发展，并不断显示其永久的生命力。

为推广鲁棒控制理论在我国的发展，许多学者在吸取前人研究成果的基础上，结合自己的研究成果，对鲁棒控制理论和方法作了详细总结和挖掘，鲁棒控制理论的著作与教材在国内也不断涌现，如：黄琳的《稳定性与鲁棒性的理论基础》，冯纯伯等著的《鲁棒控制系统设计》，申铁龙的《H_∞ 控制》，贾英明的《鲁棒 H_∞ 控制》等。对于刚刚入门的研究者来说，一本基础的鲁棒控制理论书籍就是他们通往鲁棒控制理论研究领域的捷径。一方面，好的鲁棒控制理论书籍可以使初学者容易

入门，可以在通俗易懂、详细全面的书籍中开始他们鲁棒控制的研究之路。另一方面，好的鲁棒控制理论书籍也可以使大学教授更容易传授知识，可以深入浅出地激发学生对深奥难懂的鲁棒控制理论的兴趣，从而推动鲁棒控制理论的发展。

该书就是在这样思路的引导下，从鲁棒控制理论最基本的定义和概念入手，引用了 Doyle 的《反馈控制理论》和周克敏的《鲁棒和最优控制》的一些基本理论和方法，并根据作者多年的鲁棒控制理论的教学经验以及历届学生对鲁棒控制课程的反馈信息，结合作者在鲁棒控制理论所取得的研究成果，从频域和时域两个角度，由浅入深，循序渐进地阐述了鲁棒控制的基本理论和方法。该书主要分两个部分，频域部分主要来源于前人的研究成果，是对前人研究成果的归纳与总结；时域部分主要来源于作者的部分研究成果，是对作者研究成果的提炼和升华。作者试图建立清晰易懂的鲁棒控制理论体系，希望该书能激发青年学生了解、研究鲁棒控制理论的兴趣，并进一步开启青年学生进行鲁棒控制研究的大门；同时，也希望为推动鲁棒控制理论进一步的发展起到抛砖引玉的作用。

中国工程院院士

孙优贤

2010 年 8 月 28 日

于浙大求是园

前　　言

控制系统的设计通常包括下面三个主要步骤:

(1) 系统建模，如果需要，可以通过简化模型代替机理模型;

(2) 分析系统模型，确定恰当的性能指标;

(3) 设计控制器以满足性能指标。

在工程中，对给定对象进行控制系统设计，绝不是对系统加一个反馈那么简单，必须从系统的整体性能出发来确定控制系统。它不仅要能在现有条件下作出一个良好的设计，还需要能预见什么情况下性能指标是无法达到的。因此，反馈控制理论非常重要。

在设计控制系统之初，一个首要的问题是对系统进行建模。关于模型，有必要区分下面四个概念:

(1) 实际的物理系统: 客观存在的系统。

(2) 理想的物理模型: 通过把一个实际的物理系统按结构分解成理想的模块而得到的模型。

(3) 理想的数学模型: 将物理规律和化学规律应用到理想的物理模型上而得到的模型，典型的数学模型是用非线性偏微分方程所表示的。理想的数学模型一般比较复杂而不易于处理，因此需要进一步简化模型。

(4) 简化的数学模型: 将理想的数学模型通过线性化、简化、合并处理等方法而得到的简化模型。

我们用数学模型表示物理系统是为了理论设计的需要，然而需要了解的是，没有一个数学模型可以准确地描述实际的物理系统，因为总是存在着不确定性、非线性等未知的动态。不确定性的主要来源有两个: 一个是不可预见的系统动态特性; 二是未知的干扰输入。由于系统存在着不确定性，这就意味着即使知道系统的输入也无法准确预见其输出。这就给控制系统设计提出了一个严峻的挑战: 在系统存在着不确定性的情况下，也要求控制系统达到一定的性能指标。

一般来说，设计控制系统的时候需要预先给定一定的控制目标。控制系统的目标就是通过控制某些输入使得系统输出达到所要求的形式。最基本的控制目标就是稳定，这是系统能正常运行的首要条件。其次还需要一定的性能指标，如使系统的输出 y 和参考信号之间的偏差尽可能的小 (跟踪问题)。例如: 民用飞机的垂直

方向上的加速度应当小于一定值以使乘客舒适。系统的不确定性普遍存在，譬如控制对象的模型化误差和未知参数，以及传感器噪声和外部扰动等等。因此，控制系统的设计与实现，要求存在未知不确定性的情况下，仍然能使系统稳定并保持所希望的性能。这就是所谓的不确定性系统的鲁棒控制。

鲁棒控制的早期研究主要在微摄动的不确定性，即敏感性分析问题上。这是一种无穷小分析思想，与工程实际相距较远。鲁棒控制 (Robust Control) 这一术语首次被提出是在 1972 年 (Davison, 1972)。通常意义下，鲁棒控制就是要试图描述被控对象模型的不确定性，并估计在某些特定界限下达到控制目标所留有的自由度。进入 20 世纪 70 年代末和 80 年代初，人们从实际与理论两方面越来越深刻地认识到鲁棒控制具有的特殊实践意义和理论意义，因而鲁棒控制一直是一个非常活跃且具有挑战性的研究领域。经历了众多学者近 20 年的努力，鲁棒控制理论得到了长足的发展，并取得了令人瞩目的成果，逐渐形成了各自完整的理论体系。在现代鲁棒控制研究领域中受到广泛重视的有 Kharitonov 区间理论 (Kharitonov, 1978)，H_∞ 控制理论 (Zames, 1981)，结构奇异值理论 (又简称 μ 分析与综合) (Doyle, 1982) 等。经过十多年的广泛研究，鲁棒控制的许多领域都已取得令人瞩目的成就，各方面的文献浩如烟海。我们在这里就不一一阐述。

本书尝试从频域和时域的角度研究系统的鲁棒控制问题，讨论的内容包括基于频域的单输入/单输出的、线性时不变的、有限维系统，以及基于时域的不确定、时滞正则系统与奇异系统等。本书的写法遵循由易到难、循序渐进的叙述思路，对频域环境下的不确定系统进行了分析与综合；在时域环境下，从标称系统入手，分正则系统与奇异系统，分别对不确定时滞系统的鲁棒控制问题进行了较深入阐述。

本书的结构内容安排如下：

第一部分为基于频域的不确定系统的鲁棒控制理论，内容包括第 1 章 ~ 第 6 章。其中：第 1 章介绍了频域的基础知识；第 2 章和第 3 章介绍了基本反馈系统的频域分析方法，包括不确定系统描述与稳定性分析；第 4 章 ~ 第 6 章介绍了系统的综合，其中第 4 章介绍了控制器参数化与镇定设计，第 5 章介绍了基于频域方法的 H_∞ 控制器的设计，第 6 章介绍了回路成形设计方法。

第二部分为基于时域的不确定时滞系统的鲁棒控制理论，内容包括第 7 章 ~ 第 10 章。其中：第 7 章介绍了时域鲁棒控制理论的数学基础；第 8 章介绍了线性系统的性能指标；第 9 章介绍了不确定线性系统的鲁棒控制基本理论；第 10 章介绍了不确定时滞系统鲁棒控制的一些基本方法。

第三部分为基于时域的奇异系统鲁棒控制理论，内容包括第 11 章、第 12 章。其中：第 11 章介绍了奇异系统的鲁棒控制基本理论；第 12 章介绍了基于网络的

奇异系统鲁棒控制的一些基本方法。

本书的部分内容来源于作者近年的研究成果，部分内容来自于前人的研究成果。经过系统总结，形成了鲁棒控制理论的一些基本方法。

在完成本书的过程中，先后得到了国家自然科学创新群体基金、国家 863 重点项目和国家 973 项目，以及浙江大学核心课程等项目的资助。作者在此对国家自然科学基金委、国家科技部和浙江大学研究生院的支持深表谢意。也特别感谢科学出版社给予的支持使作者有机会把自己的想法和成果加以归纳和总结出版。杭州电子科技大学鲁仁全教授和石厅博士，江苏大学的嵇小辅副教授，浙江大学的徐巍华副教授参与了本书的写作，并提出了许多有价值的建议，在此一并向他们表示衷心的感谢。此外，也要感谢作者的同事荣冈教授、吴俊教授、毛维杰教授、吴维敏副教授，以及吴争光、柏建军等老师和同学的帮助与支持。最后，我衷心感谢我的导师褚健教授把我引入鲁棒控制领域并一直工作至今。

由于作者水平有限，书中的缺点和疏漏在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

目　　录

第 1 章　频域的数学基础

本章简要介绍了频域鲁棒控制理论中的数学基础。介绍了有关泛函分析的一些知识，这里大多数结论都未加证明，读者可以自行查阅相关教材。系统的分析和综合都离不开对信号的处理，如系统跟踪性能的好坏就是通过对误差信号的大小来量测的。本章针对信号，定义了几种范数来描述其大小，同时也介绍了传递函数的范数定义，并通过传递函数的范数来描述系统输入–输出的关系。

1.1　度 量 空 间

度量空间是 Euclid 上距离概念在一般抽象集合上的推广。

定义 1.1 (度量)　设 X 为一非空集合，它的一个度量 d 是指定义在 $X \times X$ 上 的一个函数，且对任意的 $x, y, z \in X$ 满足

(1) d 是有限的非负实数;

(2) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(3) $d(x,y) = d(y,x)$;

(4) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$,

我们称定义了上述度量的集合为度量空间，通常记为 (X,d)。在同一集合上可定义不同的度量，可以构成不同的度量空间。

例 1.1　对于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 和酉空间 $\mathbb{C}^n$。它们分别由所有 n 个实数和复数的有序组 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 或 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 等组成的集合，其 Euclid 度量定义为

$$d(x,y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

可以验证 $d(x,y)$ 满足定义 1.1 中的度量条件，因此 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 都是度量空间。

在一个度量空间 (X,d) 中，借助度量可以定义序列的极限。

定义 1.2 (收敛与极限)　设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的序列，若存在 $x \in X$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

则称序列 $\{x_n\}$ 收敛到极限 x，并记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$。否则 $\{x_n\}$ 不收敛，称为发散。

定义 1.3 (Cauchy 列与完备性)　设 (X, d) 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列，如果对任意小的正数 $\epsilon > 0$ 存在 $N(\epsilon) > 0$ 使得当 $m, n > N(\epsilon)$ 时有

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

则称 $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 序列。进一步，如果 X 中的每个 Cauchy 序列都在 X 中收敛，即其极限 x 包含在 X 中，则称 X 为完备的。

不难证明 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 及酉空间 $\mathbb{C}^n$ 都是完备的。

1.2 赋范空间

为了使度量空间中的度量与线性空间中的代数运算结合起来，我们可在线性空间上建立向量的范数，它是向量模概念的推广。设 X 为一向量空间，$\|\cdot\|$ 为一定义在 X 的实值函数，如果对于任意 $x \in X$ 和 $y \in X$，该实值函数满足下列性质：

(1) $\|u\| \geqslant 0$ (正性);

(2) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (正定性);

(3) $\|au\| = |a|\|u\|$ (齐次性);

(4) $\|v + u\| \leqslant \|v\| + \|u\|$ (三角不等式),

则称这个实值函数 $\|\cdot\|$ 为范数。如果一个函数只满足其中的 (1)、(3) 和 (4)，而不一定满足 (2)，则称该函数为拟范数。对于向量 $x \in \mathbb{C}^n$, 按照如下方式定义其 p- 范数:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

特别地，当 $p = 1, 2, \infty$ 时有

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

可以验证，它们均满足范数的几个性质。定义了范数的空间 X 称为赋范空间，并记为 $(X, \|\cdot\|)$。例如，对 $\mathbb{C}^n$ 中的向量定义 p- 范数，则 $\mathbb{C}^n$ 便成为赋范空间。借助前面定义的范数，可诱导向量空间上的度量。记 $x, y \in X$，则诱导度量可以表示为

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

若在该度量下 X 是完备的，则称 X 为 Banach 空间。换句话说，如果一个赋范空间 X 中的每个 Cauchy 列均收敛到 X 中，则称该赋范空间是完备的。完备的赋范空间称为 Banach 空间。设 S 为 Banach 空间的子集，如果有下面两条性质成立:

(1) 如果 $x, y \in S$，必有 $x + y \in S$;

(2) 如果 $x \in S, c \in C$，必有 $cx \in S$,

则称 S 为 X 的一子空间。进一步，如果 S 中的每个在 X 中是收敛的序列在 S 中有极限的话，那么 S 被称为 X 中的闭的子空间。一般说来，一个子空间不必是闭的。但如果 X 是有限维空间，则其每个子空间都是闭的。考虑 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 和酉空间 $\mathbb{C}^n$。对 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，定义

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$$

可以验证它满足范数定义中的 4 个条件。由此诱导出的度量为

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

其中 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$。可以验证，在此度量下 $\mathbb{R}^n$ 空间和 $\mathbb{C}^n$ 空间都是完备的。因此，二者都是 Banach 空间。

定义 1.4 (等价范数)　设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是定义在 X 上的两个不同的范数。如果存在正数 a 和 b 使得对所有 $x \in X$ 满足

$$a\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\|x\|_2$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价。在有限维线性空间 X 上，任何两个范数都是等价的。

定义 1.5 (线性算子)　设 X, Y 是同一数域 K 上的两个相量空间，T 是一个从 X 到 Y 的映射。如果 T 的定义域 $D(T)$ 是 X 的向量子空间，T 的值域 $R(T)$ 包含在 Y 中且对所有 $x, y \in D(T)$ 和任意的 $\alpha, \beta \in K$ 有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \tag{1.1}$$

成立，则称 T 是线性算子。

定义 1.6 (线性有界算子)　设 X, Y 是同一数域 K 上的两个赋范空间，$T: X \mapsto Y$ 是一线性算子。如果存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $x \in D(T)$，有

$$\|Tx\| \leqslant c\|x\| \tag{1.2}$$

成立，则称 T 是有界算子。否则，称 T 是无界算子。

式 (1.2) 表明

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant c, \quad \forall x \neq 0 \in X$$

因此，对所有 $x \neq 0 \in D(T)$，与上式左边所对应的数集必有上确界。从而，算子 T 的范数 (或增益) 可以定义为

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.3}$$

显然，由定义 (1.3) 可得

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \|T\| \leqslant c, \quad x \neq 0 \in D(T)$$

等价地

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in D(T)$$

另外，对任意 $x, y \in D(T)$，有

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x\neq 0, \|x\|\leqslant 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \\ &\geqslant \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{y\neq 0} \|T\frac{y}{\|y\|}\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \|T\|\end{aligned}$$

因此

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \tag{1.4}$$

式 (1.4) 给出了线性算子范数的定义。由于上述范数是通过算子 T 在像空间和值空间的范数诱导出来的，因此也称为算子的诱导范数。

1.3 Hilbert 空间

内积空间是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的自然推广。

定义 1.7 (内积空间)　设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间，则 X 上的内积是一复值函数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longmapsto \mathbb{C}$$

使得对任意 $x, y, z \in X$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，有

(1) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$;

(2) $\langle x, x \rangle > 0$ 若 $x \neq 0$;

(3) $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

定义了内积的线性空间称为内积空间并记为 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$。

借助上面定义的内积，可诱出导线性空间上的范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$，$x \in X$。由 Schwarz 不等式可容易地验证它满足范数的 4 个条件。因此，内积空间必是赋范空间。对于内积空间 X 中的两个向量 x, y，如果满足 $\langle x, y\rangle = 0$，则称之为正交的，记为 $x \perp y$。更一般地，如果对所有的 $y \in S, S \subset X$，都有 $x \perp y$，则称向量 x 与集合 S 正交，记为 $x \perp S$。内积和内积诱导出的范数具有下面的性质。

定理 1.1 设 X 是一内积空间，令 $x, y \in X$，则有

(1) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz 不等式)。等式成立当且仅当存在某个常数 α 使得 $x = \alpha y$ 或者 $y = 0$。

(2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (平行四边形法则)。

(3) 若 $x \perp y$，则有 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$。

定理 1.1 中的 X 可以是完备的，也可能是不完备的。如果一个定义了内积的线性空间在其诱导范数下是完备的则称之为 Hilbert 空间。显然，Hilbert 空间也是一个 Banach 空间。例如，在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 或酉空间 $\mathbb{C}^n$ 中，定义内积 $\langle x, y\rangle = x * y$，则它们都是 Hilbert 空间，这里 $*$ 表示复共轭转置。若 X 是一个 Hilbert 空间，$M \subset X$ 是其一个子集，则 M 的正交补记为 $M^\perp$，定义为

$$M^\perp = \{x : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M, x \in X\}$$

令 X 为一向量空间，M 和 N 为其子空间，如果 $M \cap N = \{0\}$ 且 X 中的每一个元素 $z \in X$ 均可表示为 $z = x + y$，其中 $x \in N, y \in M$，则 X 称为 M 和 N 的直和，记为 $X = M \oplus N$。若 X 是一个内积空间，M 和 N 是正交的，则 X 就称为 M 和 N 的正交直和。

定理 1.2 令 X 为一 Hilbert 空间，令 M 为其子空间，则对 X 的每个元素 $z \in X$，存在唯一的向量 $x \in M$ 和 $y \in M^\perp$ 使得 $z = x + y$，即 $X = M \oplus N^\perp$。进一步，$x \in M$ 是使得 $d(z, M) = \|z - M\|$ 成立的唯一向量。

定义 1.8 (伴随算子) 设 X 和 Y 是两个 Hilbert 空间，$T : X \mapsto Y$ 是一有界线性算子，则存在唯一的算子 $T^* : Y \mapsto X$ 使得对所有的 $x \in X, y \in Y$ 有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

满足上式的 T^* 称为 T 的伴随算子。当 $T = T^*$ 时，则称 T 为自伴算子。

伴随算子的一个基本结论是 $(T^*)^* = T$。设一个 Hilbert 空间 X 可以表示为 $X = S \oplus S^\perp$。如果存在一个映射到自身的有界算子 P 满足

$$P(x+y) = x, \quad \forall x \in S, \quad y \in S^\perp$$

则称 P 为映射到 S 的正交投影。

1.4　H_2 和 H_∞ 空间

下面我们考虑某些常用的复 (矩阵) 函数空间。

1. $L_2(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 空间

$L_2(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 或简记为 L_2，是一个在 $\mathrm{j}\mathbb{R}$ 上的矩阵 (或标量) 函数 Hilbert 空间，由所有使得如下积分有界的矩阵函数 F 构成，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}[F^*(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega < \infty \tag{1.5}$$

对 $F, G \in L_2$，该 Hilbert 空间得内积定义为

$$\langle F, G\rangle := \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{trace}[F^*(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega \tag{1.6}$$

而有内积引导的范数由式 (1.7) 给出：

$$\|F\|_2 := \sqrt{\langle F, F\rangle} \tag{1.7}$$

例如，所有在虚轴上无极点的实有理严格正则传递矩阵构成 $L_2(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 的一个 (非闭的) 子空间，用 $\mathrm{RL}_2(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 或 RL_2 表示。

2. H_2 空间

H_2 空间是 $L_2(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 空间的一个 (闭) 子集，其矩阵函数 $F(s)$ 在 Re(s)>0 (开右半平面) 解析。相应的范数定义为

$$\|F\|_2^2 := \sup_{\sigma>0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{trace}[F^*(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega\right\} \tag{1.8}$$

可以证明

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{trace}[F^*(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega \tag{1.9}$$

因此，可以像计算 L_2 范数一样来计算 H_2 范数。用 RH_2 来表示 H_2 的实有理空间。它由所有严格正则和实有理稳定矩阵所构成。

3. $H_2^\perp$ 空间

$H_2^\perp$ 是 H_2 在 L_2 中的正交补，即 L_2 中在开左半平面解析的函数的 (闭) 子空间。由一切全部极点位于开右半平面的严格正则有理传递矩阵所构成的 $H_2^\perp$ 的实有理子空间记为 $\mathrm{RH}_2^\perp$。易见，若 G 是一个严格正则、稳定、实有理传递矩阵，则 $G \in H_2$ 且 $G \in H_2^\perp$。本书中大部分的研究内容将集中在实有理情形。

4. $L_\infty(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 空间

$L_\infty(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 或简记为 L_∞ 是一个矩阵 (或标量) 函数的 Banach 空间，在 $\mathrm{j}\mathbb{R}$ 上 (本性) 有界，具有范数

$$\|F\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(\mathrm{j}\omega)] \tag{1.10}$$

L_∞ 的有理子空间，用 $\mathrm{RL}_\infty(\mathrm{j}\mathbb{R})$ 表示，或简记为 RL_∞，是由所有在虚轴上无极点的正则、实有理传递函数矩阵构成。

5. H_∞ 空间

H_∞ 是 L_∞ 的一个 (闭) 子空间，其中的函数在开右半平面解析并有界。H_∞ 范数定义为

$$\|F\|_\infty := \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \bar{\sigma}[F(s)] := \sup_{w\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(\mathrm{j}w)] \tag{1.11}$$

H_∞ 的实有理子空间用 RH_∞ 表示，由所有正则、实有理传递函数矩阵构成。

6. H_∞^- 空间

H_∞^- 是 L_∞ 的一个 (闭) 子空间，其中的函数在开左半平面解析并有界。H_∞^- 范数定义为

$$\|F\|_\infty := \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \bar{\sigma}[F(s)] = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(\mathrm{j}\omega)] \tag{1.12}$$

H_∞^- 的实有理子空间用 RH_∞^- 表示，由所有极点均位于开右半平面的正则、实有理传递函数矩阵构成。

定义 1.9 若一个传递函数 $G(s)\in H_\infty^-$，则通常称其为反稳定的或反因果的。

关于 L_∞ 和 H_∞ 空间，有下面一些性质。

(1) 若 $G(s)\in L_\infty$，则 $G(s)L_2 := \{G(s)f(s) : f(s)\in L_2\}\subset L_2$;

(2) 若 $G(s)\in H_\infty$，则 $G(s)H_2 := \{G(s)f(s) : f(s)\in H_2\}\subset H_2$;

(3) 若 $G(s)\in H_\infty^-$，则 $G(s)H_2^\perp := \{G(s)f(s) : f(s)\in H_2^\perp\}\subset H_2^\perp$。

1.5 J- 谱分解

定义 1.10 设 $G(s)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是满足 $G, G^{-1}\in\mathrm{RH}_\infty$ 的方矩阵，即 $G(s)$ 在虚轴上没有极点和零点，也没有无穷远处的零点，并且可以将 $G(s)$ 分解成

$$G = G_+G_- \tag{1.13}$$

其中 $G_-, G_-^{-1}, G_+^\sim, (G_+^{-1})^\sim\in\mathrm{RH}_\infty$，则称 (1.13) 为 G 的典范分解。为了记号简单，本节用 $G^\sim(s)$ 表示 $G^{\mathrm{T}}(-s)$ 的缩写。

G 的典范分解表明，$G_-, G_-^{-1} \in \mathrm{RH}_\infty$，即 G_- 在开左半平面有相同数目的零极点。$G_+^\sim, (G_+^{-1})^\sim \in \mathrm{RH}_\infty$，即 G_+ 在开右半平面有相同数目的零极点。$G_-, G_-^{-1} \in \mathrm{RH}_\infty$ 和 $G_+^\sim, (G_+^{-1})^\sim \in \mathrm{RH}_\infty$ 意味着 G_-, G_-^{-1} 和 G_+, G_+^{-1} 均为真有理函数矩阵。

下面讨论存在典范分解的条件及求解典范分解的步骤。

设 $G(s)$ 有最小实现为 (A, B, C, D)，即

$$G(s) = (A, B, C, D)$$

因为 $G(\infty) = D$ 且 $G^{-1} \in \mathrm{RL}_\infty$，可知 D 可逆，于是 $G^{-1}(s)$ 的实现为

$$G^{-1}(s) = (A_{\mathrm{INV}}, BD^{-1}, -D^{-1}C, D^{-1})$$

其中 $A_{\mathrm{INV}} = A - BD^{-1}C$。

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征多项式为 $\alpha(s) = \alpha_-(s)\alpha_+(s)$，其中 $\alpha_-(s)$ 和 $\alpha_+(s)$ 分别表示 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda(A) > 0$ (A 无虚轴上的特征值) 的特征值构成的多项式。A 的模态子空间分别定义为

$$\chi_-(A) = \mathrm{Ker}\ \alpha_-(A) \tag{1.14}$$

$$\chi_+(A) = \mathrm{Ker}\ \alpha_+(A) \tag{1.15}$$

显然，A 的模态子空间为 $\mathrm{Ker}\ \alpha(A)$。因为 A 没有虚轴上的特征值，可以通过相似变换 $\widetilde{T}$ 将 A 变换成

$$\widetilde{T}^{-1}A\widetilde{T} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是稳定矩阵，A_2 是反稳定矩阵 (指 $\mathrm{Re}\lambda(A_2) > 0$ 的矩阵)。现将 $\widetilde{T}$ 分块为 $\widetilde{T} = [\widetilde{T}_1 \quad \widetilde{T}_2]$，可得

$$\chi_-(A) = \mathrm{Im}\widetilde{T}_1 \tag{1.16}$$

$$\chi_+(A) = \mathrm{Im}\widetilde{T}_2 \tag{1.17}$$

$\chi_-(A)$ ($\chi_+(A)$) 是 A 相应于 $\mathrm{Re}\ s < 0$ ($\mathrm{Re}\ s > 0$) 特征值的广义特征向量，即 $\widetilde{T}_1$ 的列 ($\widetilde{T}_2$ 的列) 所张成的空间。这两个模态子空间是互补的。其和构成整个 $\mathbb{R}^n$ 空间，即

$$\mathbb{R}^n = \chi_-(A) \oplus \chi_+(A)$$

为了计算 $\chi_+(A)$ 的基，利用正交相似变换 T 可以将矩阵 A 转化为按照特征值实部排序的 Schur 形，即

$$T^{\mathrm{T}}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是特征值实部为负的矩阵 ($\mathrm{Re}\lambda(A_1) < 0$)，$A_4$ 是特征值实部为正的矩阵 ($\mathrm{Re}\lambda(A_4) > 0$)。将正交矩阵 T 适当分块 $T = [T_1, T_2]$，则有 $\chi_-(A) = \mathrm{Im}T_1$，即 $\chi_-(A)$ 是由 T_1 列张成的空间。

综上所述，$\chi_+(A)$ 相应于 G 的右半平面的极点，$\chi_-(A_{\rm INV})$ 相应于 G 的左半平面的极点。于是，可以利用 $\chi_+(A)$ 和 $\chi_-(A_{\rm INV})$ 来判断 $G(s)$ 存在典范分解与否。

定理 1.3 若 $\chi_+(A)$ 和 $\chi_-(A_{\rm INV})$ 互补，则 G 存在典范分解。

证明 下面用构造法来证明。

首先，根据

$$\chi_-(A_{\rm INV}) = {\rm Im}T_1, \quad \chi_+(A) = {\rm Im}T_2$$

得到满秩的实矩阵 T_1 和 T_2。定义 $T=[T_1,T_2]$，因为 $\chi_+(A)$ 和 $\chi_-(A_{\rm INV})$ 互补，故 T 非奇异。

其次，用 T 对 $G(s)=(A,B,C,D)$ 作非奇异相似变换，按 T_1,T_2 的维数适当分块，有

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D=D \tag{1.18}$$

不难验证，A_1 和 A_4 均为方矩阵，且 ${\rm dim}A_1$=${\rm dim}\chi_-(A_{\rm INV})$，${\rm dim}A_4$=${\rm dim}\chi_+(A)$。并且，可以证明 $A_2=0$，并且 A_1 和 A_4 分别是稳定的和反稳定的矩阵，即，${\rm Re}\lambda(A_1)<0$，${\rm Re}\lambda(A_4)>0$。

再其次，用 T 对 $A_{\rm INV}$ 作相似变换，得

$$\begin{aligned} T^{-1}A_{\rm INV}T &= T^{-1}(A-BD^{-1}C)T \\ &= T^{-1}AT-T^{-1}BD^{-1}CT \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} D^{-1}\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1-B_1D^{-1}C_1 & -B_1D^{-1}C_2 \\ A_3-B_2D^{-1}C_1 & A_4-B_2D^{-1}C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以证明，上式中 $A_3-B_2D^{-1}C_1=0$，$A_1-B_1D^{-1}C_1$ 是稳定的矩阵，即 ${\rm Re}\lambda(A_1-B_1D^{-1}C_1)<0$，$A_4-B_2D^{-1}C_2$ 是反稳定的矩阵，即 ${\rm Re}\lambda(A_4-B_2D^{-1}C_2)>0$。

最后，令

$$G_+(s)=(A_4,B_2,C_2,D), \quad G_-(s)=(A_1,B_1,D^{-1}C_1,I) \tag{1.19}$$

则有

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(s) &= (A_4-B_2D^{-1}C_2, B_2D^{-1}, -D^{-1}C_2, D^{-1}) \\ G_-^{-1}(s) &= (A_1-B_1D^{-1}C_1, B_1, -D^{-1}C_1, I) \end{aligned}$$

因为 $A_1, A_1-B_1D^{-1}C_1$ 是稳定矩阵，$A_4, A_4-B_2D^{-1}C_2$ 是反稳定矩阵，可知 $G_-, G_-^{-1}, G_+^{\sim}, (G_+^{-1})^{\sim} \in {\rm RH}_\infty$。于是系统 $G_+(s)$ 和 $G_-(s)$ 串联之后的系统为 $G_+(s)G_-(s)$，其状态空间实现为

$$
\begin{aligned}
G_+(s)G_-(s) &= (A_4, B_2, C_2, D)(A_1, B_1, D^{-1}C_1, I) \\
&= \left[\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2D^{-1}C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_2], D\right] \\
&= \left[\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \quad C_2], D\right] \\
&= (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D) \\
&= (A, B, C, D) \\
&= G(s)
\end{aligned}
\qquad \square
$$

上述定理的证明过程同时也揭示了典范分解的步骤。下面介绍一种在求解 H_∞ 控制问题中要用到的 J- 谱分解。

定义 1.11　设

$$
G(s) = \begin{bmatrix} I & G_1(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1.20}
$$

$$
J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \tag{1.21}
$$

其中 $G_1(s)$ 为实有理矩阵，且满足

(1) $G_1(s)$ 为严格真，并在 $\mathrm{Re}\ s \leqslant 0$ 内解析；

(2) $G_1(s)$ 的 Hankel 范数 $\|G_1(s)\|_{\mathrm{H}} < 1$，

定义如下的因式分解：

$$
G^{\sim}(s)JG(s) = G_-^{\sim}(s)JG_-(s) \tag{1.22}
$$

其中

$$
G_-(s),\ G_-^{-1}(s) \in \mathrm{RH}_\infty
$$

为 $G(s)$ 的 J- 谱分解，$G_-(s)$ 称为 $G(s)$ 的 J- 谱因子。

下面具体说明 J- 谱分解的步骤。

设 $G(s)$ 的最小实现为

$$
G_1(s) = (A_1, B_1, C_1, 0)
$$

由 $G_1(s)$ 的性质可知，A_1 是反稳定矩阵。若记

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = G(s)u \tag{1.23}
$$

等价地有

$$
\begin{cases} y_1 = u_1 + G_1(s)u_2 \\ y_2 = u_2 \end{cases} \tag{1.24}
$$

考虑到 $G_1(s)$ 的最小实现为 $(A_1, B_1, C_1, 0)$，由式 (1.24) 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u_2 \\ y_1 = C_1x + u_1 \\ y_2 = u_2 \end{cases}$$

由此可得 $G(s)$ 的实现为

$$G(s) = \begin{bmatrix} I & G_1(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} = \left[A_1,\ [0,\ B_1],\ \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ I \right] \tag{1.25}$$

类似可得 $JG(s)$ 的实现为

$$JG(s) = \begin{bmatrix} I & G_1(s) \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \left[A_1,\ [0,\ B_1],\ \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ J \right] \tag{1.26}$$

由式 (1.25) 可得

$$G^{\sim}(s) = \left[-A_1^{\mathrm{T}},\ -[C_1^{\mathrm{T}},\ 0],\ \begin{bmatrix} 0 \\ B_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\ I \right] \tag{1.27}$$

由式 (1.26) 和式 (1.27)，可得系统 $G^{\sim}(s)$ 和 $JG(s)$ 串联之后的系统为

$$\begin{aligned} G^{\sim}(s)JG(s) &= \left[-A_1^{\mathrm{T}},\ -[C_1^{\mathrm{T}},\ 0],\ \begin{bmatrix} 0 \\ B_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\ I \right] \left[A_1,\ [0,\ B_1],\ \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ J \right] \\ &= [A,\ B,\ C,\ J] \end{aligned} \tag{1.28}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}} & C_1^{\mathrm{T}}C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} C_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ -B_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

由式 (1.28) 进一步有

$$(G^{\sim}(s)JG(s))^{-1} = (A_{\mathrm{INV}},\ BJ^{-1},\ -J^{-1}C,\ J^{-1}) \tag{1.29}$$

其中

$$A_{\mathrm{INV}} = A - BJ^{-1}C = \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ -B_1B_1^{\mathrm{T}} & A_1 \end{bmatrix},\quad BJ^{-1} = \begin{bmatrix} C_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -B_1 \end{bmatrix},$$

$$-J^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & -C_1 \\ -B_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

注意到 $G_1(s)$ 的最小实现为 $(A_1, B_1, C_1, 0)$，其可控性和可观性格莱姆矩阵 W_{c} 和 W_{o} 满足下面的 Lyapunov 方程，即

$$\begin{aligned} A_1W_{\mathrm{c}} + W_{\mathrm{c}}A_1^{\mathrm{T}} &= B_1B_1^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}W_{\mathrm{o}} + W_{\mathrm{o}}A_1 &= C_1^{\mathrm{T}}C_1 \end{aligned}$$

用 $T_1 = \begin{bmatrix} W_o & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 对式 (1.28) 中的矩阵 A 作非奇异相似变换，得

$$\begin{aligned} T_1^{-1}AT_1 &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -W_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}} & C_1^{\mathrm{T}}C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_o & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -(A_1^{\mathrm{T}}W_o + W_oA_1 - C_1^{\mathrm{T}}C_1) & -A_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为 A_1 是反稳定矩阵，故 A 的正模态子空间为

$$\chi_+(A) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} W_o \\ I \end{bmatrix}$$

用 $T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_c & I \end{bmatrix}$ 对式 (1.29) 中的矩阵 A_{INV} 作非奇异相似变换，得

$$T_2^{-1}A_{\mathrm{INV}}T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -W_c & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ -B_1B_1^{\mathrm{T}} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_c & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

则，A_{INV} 的负模态子空间为

$$\chi_-(A_{\mathrm{INV}}) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} I \\ W_c \end{bmatrix}$$

定义矩阵 T 和 N 分别为

$$T = \begin{bmatrix} I & W_o \\ W_c & I \end{bmatrix}, \quad N = (I - W_oW_c)^{-1}$$

并且，根据分块矩阵求逆公式有

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{bmatrix} (I - W_oW_c)^{-1} & -W_o(I - W_cW_o)^{-1} \\ -W_c(I - W_oW_c)^{-1} & (I - W_cW_o)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N & -W_oN^{\mathrm{T}} \\ -W_cN & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N & -NW_o \\ -W_cN & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.30}$$

由式 (1.30) 可知，T^{-1} 存在的充分必要条件是 N 存在，也即要求

$$\lambda(W_oW_c) \neq 1$$

由定义 1.11 中可知，$G_1(s)$ 的 Hankel 范数 $\|G_1\|_{\mathrm{H}} < 1$。即 $\lambda_{\max}(W_oW_c) < 1$，所以 N 存在，T^{-1} 也必存在。于是可知，$\chi_-(A_{\mathrm{INV}}) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} I \\ W_c \end{bmatrix}$ 和 $\chi_+(A) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} W_o \\ I \end{bmatrix}$

互补。由定理 1.3 可知，$G^{\sim}(s)JG(s)$ 存在典范分解。用类似于 (1.18) 的变换有

$$
\begin{aligned}
T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} N & -NW_o \\ -W_cN & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1^T & C_1^TC_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & W_o \\ W_c & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -NA_1^T+(NC_1^TC_1-NW_oA_1)W_c & -NA_1^TW_o+NC_1C_1-NW_oA_1 \\ W_cNA_1^T-(W_cNC_1^TC_1-N^TA_1)W_c & W_cNA_1^TW_o-W_cNC_1^TC_1+N^TA_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -NA_1^TN^{-1} & 0 \\ \bullet & A_1 \end{bmatrix} \\
T^{-1}B &= \begin{bmatrix} N & -NW_o \\ -W_cN & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} NC_1^T & -NW_oB_1 \\ -W_cNC_1^T & N^TB_1 \end{bmatrix} \\
CT &= \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ -B_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & W_o \\ W_c & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1W_c & C_1 \\ -B_1^T & -B_1^TW_o \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

再仿照式 (1.19)，得

$$
G_+(s) = \left[A_1,\ [-W_cNC_1^T,\ N^TB_1],\ \begin{bmatrix} C_1 \\ -B_1^TW_o \end{bmatrix},\ J\right] \tag{1.31}
$$

$$
G_-(s) = \left[-NA_1^TN^{-1},\ [NC_1^T,\ NW_oB_1],\ \begin{bmatrix} C_1W_c \\ B_1^T \end{bmatrix},\ I\right] \tag{1.32}
$$

可以验证 $G_+(s) = G_-^{\sim}(s)J$，于是有

$$
G^{\sim}(s)JG(s) = G_-^{\sim}(s)JG_-(s)
$$

由式 (1.32) 可得

$$
(G_-(s))^{-1} = \left[-A_1^T,\ [NC_1^T,\ -NW_cB_1],\ \begin{bmatrix} -C_1W_c \\ -B_1^T \end{bmatrix},\ I\right] \tag{1.33}
$$

根据式 (1.32) 和式 (1.33) 可知，$G_-(s), G_-^{-1}(s) \in \mathrm{RH}_\infty$。

1.6 信号的范数

本节将讨论信号和系统的范数。首先，针对信号定义一些常用的范数。

1- 范数

$$
\|u\|_1 \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\mathrm{d}t
$$

信号 $u(t)$ 的 1- 范数就是其绝对值的积分，表示了信号的时间累积量。

2- 范数

$$\|u\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

信号 $u(t)$ 的 2- 范数表示了该信号所携带的总积量。

∞- 范数

$$\|u\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_t |u(t)|$$

信号 $u(t)$ 的 ∞- 范数是它的绝对值的上确界，表示了该信号的最大幅值。

功率信号。信号 $u(t)$ 的平均功率就是它瞬时功率对时间的平均值，即，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)^2 \mathrm{d}t$$

如果这个极限存在，则称信号 $u(t)$ 为功率信号。我们将平均功率的平方根定义为 $\mathrm{pow}(u)$, 即

$$\mathrm{pow}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

需要注意的是，pow 不满足范数的性质 (2)，因为非零信号的平均功率可以是零，故信号的 pow 只是拟范数。

下面研究信号的各种范数之间的关系。

引理 1.1　如果 $\|u\|_2 < \infty$，那么 $u(t)$ 是一功率信号，并且 $\mathrm{pow}\,(u) = 0$。

证明　假定 $u(t)$ 的 2- 范数有限，注意到

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2T}\|u\|_2^2$$

又因为 $\|u\|_2 < \infty$，有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\|u\|_2^2 = 0$$

于是可知 $u(t)$ 是一功率信号，且 $\mathrm{pow}(u) = 0$。 □

引理 1.2　如果 $u(t)$ 是一功率信号且 $\|u\|_\infty < \infty$，那么 $\mathrm{pow}(u) \leqslant \|u\|_\infty$。

证明　由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)^2 \mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|u(t)\|_\infty^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2T}\|u(t)\|_\infty^2 \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t \\ &= \|u(t)\|_\infty^2\end{aligned}$$

令 $T \to \infty$，即得引理中的结论。 □

引理 1.3 如果 $\|u\|_1 < \infty$，且 $\|u\|_\infty < \infty$，有 $\|u\|_2 < (\|u\|_\infty \|u\|_1)^{1/2}$，且 $\|u\|_2 < \infty$。

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
\|u\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)||u(t)| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|u(t)\|_\infty |u(t)| \mathrm{d}t \\
&= \|u(t)\|_\infty \|u(t)\|_1
\end{aligned}
$$

于是有 $\|u\|_2^2 \leqslant \|u(t)\|_\infty \|u(t)\|_1$。又因为 $\|u\|_1 < \infty$，$\|u\|_\infty < \infty$，有 $\|u\|_2 < \infty$。 □

图 1.1 概括了几种范数之间的关系，其中 $\|\cdot\|_1$ 表示了所有 1- 范数有限的信号的集合，pow(·) 表示了所有 pow 有限的信号的集合，等等。

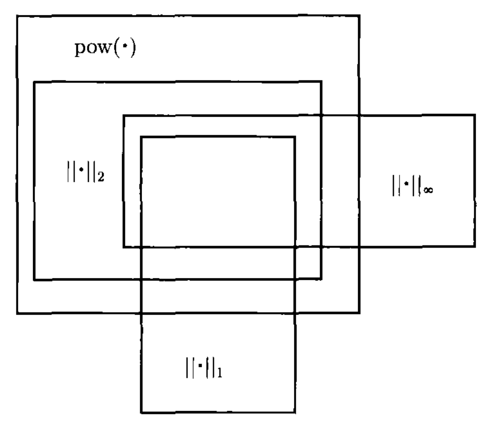


图 1.1 信号范数之间的关系

例 1.2 计算信号 $u_1(t)$ 的各种范数及其 pow。

$$
u_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1/\sqrt{t}, & 0 < t \leqslant 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}
$$

由于

$$
\|u_1(t)\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = 2
$$

所以它的 1- 范数存在且 $\|u_1(t)\|_1 = 2$。因为 $u_1^2(t)$ 在积分区间 [0, 1] 是发散的，所以它的 2- 范数不存在。同理可知，$u_1(t)$ 的平均功率也不存在，因此 $u_1(t)$ 不是功率信号，它的 pow 不存在。又因为 $u_1(t)$ 是无界的，因此 $\|u_1(t)\|_\infty$ 是无限的，$u_1(t)$ 的 ∞ 范数也是不存在的。那么该信号在图 1.1 中的位置如图 1.2 所示。

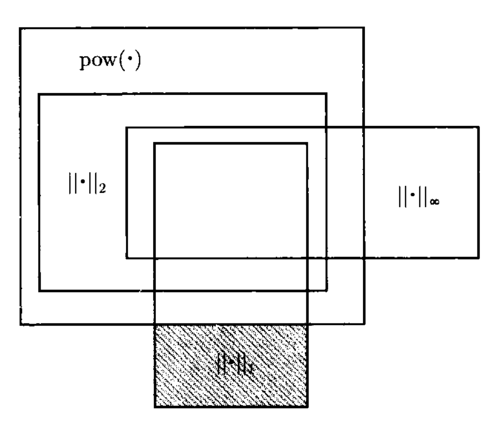


图 1.2　例 1.2 中的 $u_1(t)$

例 1.3　计算信号 $u_2(t)$ 的各种范数及其 pow。

$$u_2(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1/\sqrt[4]{t}, & 0<t\leqslant 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

由于

$$\|u_2\|_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}$$

所以它的 1- 范数存在。另外

$$\|u_2\|_2^2=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=2$$

于是 $\|u_2\|_2=\sqrt{2}$。根据引理 1.1 可知 $\mathrm{pow}(u_2(t))=0$。另外，$u_2(t)$ 在其定义域上是无界的，因此其 ∞ 范数不存在。那么该信号在图 1.1 中的位置如图 1.3 所示。

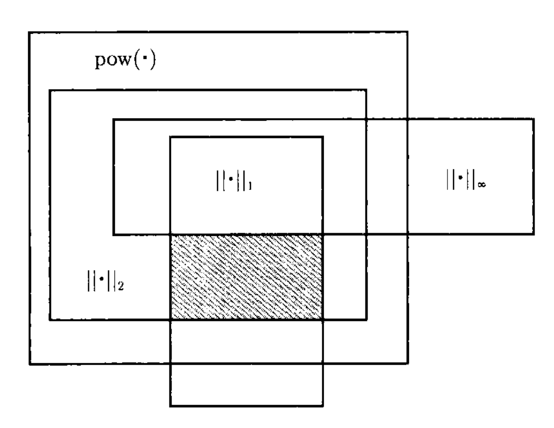


图 1.3　例 1.3 中的 $u_2(t)$

1.7 系统的范数

考虑一个线性时不变的、因果的、有限维系统，其输入–输出模型在时间域可表示为

$$y(t)=G(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $G(s)$ 表示系统的传递函数，即 $G(t)$ 的 Laplace 变换。那么 $G(s)$ 是具有实系数的有理函数，即

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$
$$a_i,\ b_j\in\mathbb{R},\quad i=1,2,\cdots,n,\quad b=0,1,\cdots,m$$

下面给出系统的一些常用定义。

定义 1.12 (因果性) 系统的因果性指的是系统的输出 $y(t)$ 由过去的输入决定，即 $G(t)=0,\forall t<0$。

定义 1.13 (稳定) 如果 $G(s)$ 在闭右半平面 ($\mathrm{Re}\ s\geqslant 0$) 解析，或在 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 0$ 无极点，我们称系统是稳定的。

定义 1.14 (正则) 如果 $G(\mathrm{j}w)$ 是有限的 (分母的阶次大于或等于分子的阶次)，那么称系统是正则的。

定义 1.15 (严格正则) 如果

$$\lim_{w\to\infty}G(\mathrm{j}w)=0$$

即分母的阶次严格大于分子的阶次，则称系统是严格正则的。

定义 1.16 (双正则) 如果 $G(\mathrm{j}w)$ 和 $G(\mathrm{j}w)^{-1}$ 两个都是正则的 (分母和分子的阶次相等)，则称 $G(\mathrm{j}w)$ 是双正则的。

我们对系统引进下面两个范数。

2- 范数

$$\|G(\mathrm{j}w)\|_2\overset{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mathrm{j}w)^2\mathrm{d}w\right)^{1/2}$$

注意到 $G(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$，如果 $G(\mathrm{j}w)$ 是稳定的，由 Parseval 定理有

$$\begin{aligned}\|G(\mathrm{j}w)\|_2&\overset{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mathrm{j}w)^2\mathrm{d}w\right)^{1/2}\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|G(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\end{aligned}$$

即有 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2 = \|G(t)\|_2$

∞- 范数

$$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty \overset{\text{def}}{=\!=} \sup_w |G(\mathrm{j}w)|$$

在复平面上，$G(\mathrm{j}w)$ 的 ∞- 范数是它的 Nyquist 曲线离原点最远的距离，它也是 $G(\mathrm{j}w)$ 的 Bode 幅频特性图的峰值。∞- 范数的一个重要性质是

$$\|G(\mathrm{j}w)H(\mathrm{j}w)\|_\infty \leqslant \|G(\mathrm{j}w)\|_\infty \|H(\mathrm{j}w)\|_\infty$$

对于系统这两个范数的存在性，有下面的结论。

引理 1.4 $G(\mathrm{j}w)$ 的 2- 范数是有限的，当且仅当 $G(\mathrm{j}w)$ 是严格正则的，且没有极点在虚轴上；$G(\mathrm{j}w)$ 的 ∞- 范数是有限的，当且仅当 $G(\mathrm{j}w)$ 是正则的，且无极点在虚轴上。

证明 下面给出系统 2- 范数有限的证明。

充分性证明。若 $G(\mathrm{j}w)$ 是严格正则的，且没有极点在虚轴上，则

$$\lim_{w\to\infty} |G(\mathrm{j}w)| = 0, \quad \sup_w |G(\mathrm{j}w)| < \infty$$

若取 $H(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$， $T, K > 0$，则有

$$|H(\mathrm{j}w)| = \frac{K}{\sqrt{T^2w^2+1}}$$

于是

$$\lim_{w\to\infty} |H(\mathrm{j}w)| = 0, \quad \sup_w |H(\mathrm{j}w)| < K$$

令 K 充分大，T 充分小 (曲线充分平坦)，则必有 $|H(\mathrm{j}w)| \geqslant |G(\mathrm{j}w)|$， $\forall w$，从而有 $\|H(\mathrm{j}w)\|_2 \geqslant \|G(\mathrm{j}w)\|_2$。注意到

$$\begin{aligned}
\|H(\mathrm{j}w)\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2}{1+T^2w^2}\mathrm{d}w\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\frac{K^2}{T}\arctan(Tw)|_{-\infty}^{\infty}\right)^{1/2} \\
&= \frac{K}{\sqrt{2T}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

则必有：$\|G(\mathrm{j}w)\|_2 < \infty$。充分性得证。

必要性证明 (反证法)。若 $G(\mathrm{j}w)$ 存在极点在虚轴上，则在极点处有 $|G(\mathrm{j}w)| \to \infty$，于是有 $|G(\mathrm{j}w)|_2 = \infty$。若 $G(\mathrm{j}w)$ 不是严格正则的，可分两种情况讨论：若 $G(\mathrm{j}w)$ 是双正则的，

$$\lim_{w\to\infty} |G(\mathrm{j}w)| = \left|\frac{b_n}{a_n}\right| > 0$$

若 $G(\mathrm{j}w)$ 不是双正则的

$$\lim_{w\to\infty}|G(\mathrm{j}w)|=\infty$$

从而有：$\|G(\mathrm{j}w)\|_2=\infty$。必要性得证。类似可得关于 ∞- 范数的证明。 □

下面介绍系统范数的计算方法。系统 2- 范数的计算。我们可以按照定义计算。假设 $G(\mathrm{j}w)$ 是严格正则的，且无极点在虚轴上 (保证了它的 2- 范数有限)，于是有

$$\begin{aligned}\|G(\mathrm{j}w)\|_2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}G(-s)G(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint G(-s)G(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

最后的积分是沿虚轴向上，然后沿包围左半平面的无穷大半圆的回路积分。因为 $G(\mathrm{j}w)$ 是严格正则的，故沿无穷大半圆的积分等于 0。根据留数定理，$\|G(\mathrm{j}w)\|_2^2$ 等于 $G(-s)G(s)$ 在它的左半平面极点上的留数之和。

例 1.4 已知一系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{\tau s+1},\quad \tau>0$$

求其 2- 范数。

$G(-s)G(s)$ 在左半平面的极点是 $s=-1/\tau$，在这一极点上的留数等于

$$\lim_{s\to-1/\tau}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{-\tau s+1}\frac{1}{\tau s+1}=\frac{1}{2\tau}$$

因此 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2=1/\sqrt{2\tau}$。

计算 ∞- 范数需要搜索。设一系列稠密的频率点 $\{w_1,\cdots,w_N\}$，$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$ 的估计值为

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|G(\mathrm{j}w_k)|$$

另一方法是通过求解方程

$$\frac{\mathrm{d}|G(\mathrm{j}w)|^2}{\mathrm{d}w}(\mathrm{j}w)=0$$

找到 $|G(\mathrm{j}w)|$ 的最大值的位置。因为 $|G(\mathrm{j}w)|$ 是有理的，这个导数可以用公式求出，然后就只需计算导出多项式的根。

例 1.5 已知一系统为

$$G(s)=\frac{as+1}{bs+1},\quad a,b>0$$

求出其 ∞- 范数。

根据其 Bode 幅频特性图可知：当 $a \geqslant b$，它是递增的 (高通)，反之，它是递减的 (低通)。于是

$$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty = \begin{cases} a/b, & a \geqslant b \\ 1, & a < b \end{cases}$$

1.8　功 率 分 析

定义 1.17 (自相关函数)　对于一功率信号 $u(t)$，其自相关函数定义为

$$R_u(\tau) \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)u(t+\tau)\mathrm{d}t$$

下面介绍几条关于自相关函数的性质。

性质 1.1

$$R_u(0) = \mathrm{pow}(u)^2 \geqslant 0$$

根据定义可得该性质的证明。

性质 1.2

$$R_u(\tau) \leqslant R_u(0)$$

证明　根据 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left|\int_{-T}^{T} u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_{-T}^{T} u(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_{-T}^{T} v(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

令 $v(t) = u(t+\tau)$，并且在不等式两边同时乘以 $1/(2T)$ 可得

$$\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} u(t)v(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T} u(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_{-T}^{T} u(t+\tau)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

取 $T\to\infty$ 可得所需结果。　□

令 S_u 表示 R_u 的 Fourier 变换，有下面的关系成立：

$$S_u(\mathrm{j}w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\mathrm{j}w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}w$$

定义 1.18 (功率谱密度)　我们称 $S_u(\mathrm{j}w)$ 为信号 $u(t)$ 的功率谱密度。

定义 1.19　对于两个功率信号 u 和 v，定义它们的互相关函数为

$$R_{uv}(\tau) \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)v(t+\tau)\mathrm{d}t$$

它的 Fourier 变换 S_{uv}

$$S_{uv}(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{uv}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau$$

叫做互功率谱密度函数。

假定一线性系统的传递函数 G 是稳定的和正则的，其输入信号和输出信号分别为 u,y，下面讨论与该线性系统有关的一些性质。

性质 1.3

$$R_{uy}(\tau)=G*R_u(\tau)$$

证明 由系统输入输出关系得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)u(t-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

于是有

$$u(t)y(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)u(t)u(t+\tau-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

求 $u(t)y(t+\tau)$ 的平均值，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)R_u(\tau-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$ □

性质 1.4

$$R_y(\tau)=G*G_{\mathrm{rev}}*R_u$$

其中 $G_{\mathrm{rev}}(t)=G(-t)$。

证明 利用上面得到的性质有

$$y(t)y(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)y(t)u(t+\tau-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

于是可知，$y(t)y(t+\tau)$ 的平均值为

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)R_{yu}(\tau-\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

即 $R_y=G*R_{yu}$。同理也可以得到 $R_{yu}=G_{\mathrm{rev}}*R_u$，于是性质中的结论得证。 □

性质 1.5

$$S_y(\mathrm{j}w)=|G(\mathrm{j}w)|^2S_u(\mathrm{j}w)$$

证明 从前面的结论可得

$$S_y(\mathrm{j}w)=G(\mathrm{j}w)G_{\mathrm{rev}}(\mathrm{j}w)S_u(\mathrm{j}w)$$

进一步可以得到 G_{rev} 的 Fourier 变换等于 $G(\mathrm{j}w)$ 的复共轭，于是可得所需结论。□

1.9　输入–输出关系

本节研究系统输入–输出信号之间的关系。考察一个稳定的、严格正则的线性系统，其输入、输出信号分别为 $u(t)$ 和 $y(t)$，$y(t)=G(t)*u(t)$。传递函数为 $G(\mathrm{j}w)$，则系统的输入、输出关系概括在下面的两个表里。例如，假定系统输入 $u(t)$ 是单位脉冲信号，那么输出 $y(t)$ 的 2- 范数等于 $G(t)$ 的 2- 范数，根据 Parseval 定理，也等于 $G(\mathrm{j}w)$ 的 2- 范数。这便是表 1.1 中的 (1,1) 项。其余项的意义与此相同。值得注意的是，(1,2) 项中的 ∞ 需要满足 $G(t)\neq 0$ 才能成立。表 1.1 中给出的是当系统输入信号分别是 $\delta(t)$ 和 $\sin(wt)$ 时，其对应输出信号的各种范数和 pow。表 1.2 考虑的是另外一种情况。当系统输入 $u(t)$ 不是一个具体的信号，而是 2- 范数不大于 1 的任何信号，则其输出信号 2- 范数的上确界为

$$\sup\{\|y(t)\|_2:\ \|u(t)\|_2\leqslant 1\}$$

我们称之为 2- 范数 /2- 范数系统增益。下面将证明，它等于 $\|G(\mathrm{j}w)\|$ 的 ∞- 范数。这就是表 1.2 中的 (1,1) 项。其余项对应着系统的其他增益。值得注意的是，表中标有 ∞ 的项，只要 $G(\mathrm{j}w)\neq 0$，总是成立的。

表 1.1　输入为 $\delta(t)$ 和 $\sin(wt)$ 时，输出范数和 pow

	$u(t)=\delta(t)$	$u(t)=\sin(wt)$
$\|y\|_2$	$\|G(\mathrm{j}w)\|_2$	∞
$\|y\|_\infty$	$\|G(t)\|_\infty$	$\lvert G(\mathrm{j}w)\rvert$
pow(y)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert G(\mathrm{j}w)\rvert$

表 1.2　系统增益

	$\|u\|_2$	$\|u\|_2$	pow(u)
$\|y\|_2$	$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$	∞	∞
$\|y\|_\infty$	$\|G(\mathrm{j}w)\|_2$	$\|G(t)\|_1$	∞
pow(y)	0	$\leqslant\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$	$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$

下面给出两个表中部分结论的证明。

表 1.1 中结论的证明如下。

$(1,1)$ 项。由于 $u(t)=\delta(t)$，有 $y(t)=G(t)*\delta(t)=G(t)$，因此 $\|y(t)\|_2=\|G(t)\|_2$。再根据 Parseval 定理，有 $\|G(t)\|_2=\|G(\mathrm{j}w)\|_2$，于是得到 $\|y(t)\|_2=\|G(\mathrm{j}w)\|_2$。同理可得 (2,1) 项的证明。

(3, 1) 项。

$$
\begin{aligned}
\text{pow}(y(t))^2 &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} G(t)^2\mathrm{d}t \\
&\leqslant \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)^2\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\|G(t)\|_2^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(1, 2) 项。由于系统的输入信号 $u(t)=\sin(wt)$，则输出信号的稳态为

$$
y(t) = |G(\mathrm{j}w)|\sin[wt+\arg G(\mathrm{j}w)]
$$

只要 $G(\mathrm{j}w)\neq 0$ 就有 $\|y(t)\|_2=\infty$。

根据 (1, 2) 项的证明可知，$y(t)$ 的幅值为 $|G(\mathrm{j}w)|$，因此有

$$
\|y(t)\|_\infty = \|G(\mathrm{j}w)\|_\infty
$$

于是可得 (2, 2) 项的证明。

(3, 2) 项。令 $\phi \overset{\text{def}}{=} \arg G(\mathrm{j}w)$，有

$$
\begin{aligned}
\text{pow}(y(t))^2 &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|G(\mathrm{j}w)|^2\sin^2(wt+\phi)\mathrm{d}t \\
&= |G(\mathrm{j}w)|^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin^2(wt+\phi)\mathrm{d}t \\
&= |G(\mathrm{j}w)|^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2wT}\int_{-wT+\phi}^{wT+\phi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= |G(\mathrm{j}w)|^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}|G(\mathrm{j}w)|^2
\end{aligned}
$$

表 1.2 中结论的证明。设 $u(t), y(t)$ 对应的频域函数分别为 $U(\mathrm{j}w), Y(\mathrm{j}w)$。

(1, 1) 项。由 $Y(\mathrm{j}w)=G(\mathrm{j}w)U(\mathrm{j}w)$，且 $\|y(t)\|_2=\|Y(\mathrm{j}w)\|_2$ (Parseval 定理)，有

$$
\begin{aligned}
\|y(t)\|_2^2 &= \|Y(\mathrm{j}w)\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\mathrm{j}w)|^2|U(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sup_{w}|G(\mathrm{j}w)|\right\}^2|U(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w\\
&=\left\{\sup_{w}|G(\mathrm{j}w)|\right\}^2\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|U(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w\right\}\\
&=\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty^2\|U(\mathrm{j}w)\|_2^2\\
&=\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty^2\|u(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

即

$$
\|y(t)\|_2\leqslant\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty\|u(t)\|_2,\quad \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}\leqslant\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty
$$

下面证明 $\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$ 是最小上界。选择 w_0，使 $|G(\mathrm{j}w_0)|=\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$，不失一般性，假设 $w_0>0$。选择输入 u^* 满足

$$
|U^*(\mathrm{j}w)|=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\varepsilon}}, & |w-w_0|<\varepsilon,\ |w+w_0|<\varepsilon\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\|y(t)\|_2^2&=\|Y(\mathrm{j}w)\|_2^2\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\mathrm{j}w)|^2|U^*(\mathrm{j}w)|^2\mathrm{d}w\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-w_0-\varepsilon}^{-w_0+\varepsilon}|G(\mathrm{j}w)|^2\frac{\pi}{2\varepsilon}\mathrm{d}w+\frac{1}{2\pi}\int_{w_0-\varepsilon}^{w_0+\varepsilon}|G(\mathrm{j}w)|^2\frac{\pi}{2\varepsilon}
\end{aligned}
$$

当 $\varepsilon\to 0$，对上面的积分进行运算可得

$$
\|y(t)\|_2^2\approx\frac{1}{2\pi}\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty^2\frac{2\pi}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon=\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty^2
$$

即 $\|y(t)\|_2\approx\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$。由此可得，$\|G(\mathrm{j}w)\|_\infty$ 为最小上界。

(2, 1) 项。由 $y(t)=G(t)*u(t)$，有

$$
\begin{aligned}
|y(t)|&=\left|\int_{\infty}^{\infty}G(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\\
&\leqslant\left|\int_{\infty}^{\infty}G^2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|^{1/2}\left|\int_{\infty}^{\infty}u^2(\tau)\mathrm{d}\tau\right|^{1/2}\quad(\text{Cauchy-Schwarz 不等式})\\
&=\left(\int_{\infty}^{\infty}G^2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\infty}^{\infty}u^2(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\\
&=\|G(t)\|_2\|u(t)\|_2\\
&=\|G(\mathrm{j}w)\|_2\|u(t)\|_2,\quad\forall t\quad(\text{Parseval 定理})
\end{aligned}
$$

或

$$\|y(t)\|_\infty \leqslant \|G(\mathrm{j}w)\|_2\|u(t)\|_2, \quad \frac{\|y(t)\|_\infty}{\|u(t)\|_2} \leqslant \|G(\mathrm{j}w)\|_2$$

下面证明 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2$ 是最小上界。选择 $u^*(t) = \dfrac{G(-t)}{\|G(t)\|_2}$，则有 $\|u^*(t)\|_2 = 1$，且

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_\infty^\infty G(t-\tau)u^*(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_\infty^\infty G(t-\tau)\frac{G(-\tau)}{\|G(t)\|_2}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} |y(0)| &= \int_\infty^\infty \frac{G^2(-t)}{\|G(t)\|_2}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\|G(t)\|_2}\int_\infty^\infty \frac{G^2(-t)}{\|G(t)\|_2}\mathrm{d}\tau \\ &= \|G(t)\|_2 \\ &= \|G(\mathrm{j}w)\|_2 \end{aligned}$$

注意到 $|y(0)| \leqslant \|y(t)\|_\infty$，有

$$|y(0)| = \|G(\mathrm{j}w)\|_2 \leqslant \|y(t)\|_\infty$$

又因为 $\|u^*(t)\|_2 = 1$，有 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2 \leqslant \dfrac{\|y(t)\|_\infty}{\|u^*(t)\|_2}$。前面又证得 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2 \geqslant \dfrac{\|y(t)\|_\infty}{\|u(t)\|_2}$，当 $u(t)$ 取一特殊形式时，如 $u(t) = u^*(t)$，这个关系式仍然成立，于是得到

$$\|G(\mathrm{j}w)\|_2 \leqslant \frac{\|y(t)\|_\infty}{\|u^*(t)\|_2} \leqslant \|G(\mathrm{j}w)\|_2$$

所以

$$\frac{\|y(t)\|_\infty}{\|u^*(t)\|_2} = \|G(\mathrm{j}w)\|_2$$

即

$$\|y(t)\|_\infty = \|u^*(t)\|_2\|G(\mathrm{j}w)\|_2 = \|G(\mathrm{j}w)\|_2$$

由于 $\|y(t)\|_\infty$ 可以取值到 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2$，所以 $\|G(\mathrm{j}w)\|_2$ 为 $\|y(t)\|_\infty$ 的最小上界。其余证明可作为练习。

这两个表中的内容在控制系统的分析和设计中有着重要的应用。例如，已知一个稳定的、严格正则的 (或至少是正则的) 系统，受到一个干扰输入 $u(t)$ 的作用。这两个表可以告诉我们各种意义下，$u(t)$ 对系统输出 $y(t)$ 的影响有多大。例如，若

$u(t)$ 是具有一定频率的正弦信号，那么表 1.1 中的第 2 列给出了三种意义下 $y(t)$ 的相对大小。通常情况下，干扰信号的具体形式是未知的，因而表 1.2 更具实际意义。

例 1.6　设一系统的传递函数

$$G(s) = \frac{1}{10s+1}$$

干扰输入 $d(t)$ 的能量已知为 $\|d(t)\|_2 \leqslant 0.4$。求出系统输出信号 $y(t)$ 的 2- 范数的一个估计值。

根据表 1.2 的 (1,1) 项可知

$$\|y(t)\|_2 = \|G(\mathrm{j}w)\|_\infty \|u(t)\|_2 \leqslant \frac{0.4}{\sqrt{20}}$$

1.10　注　　记

本章主要讨论了频率鲁棒控制的数学基础，其中 1.1~1.5 节主要参考了文献 [1]~[4] 的相关内容。1.6~1.9 节内容由文献 [5] 的第 2 章整理而成。

1.11　习　　题

1. 计算下面各信号的各种范数及 pow，并确定它们位于图 1.1 中的什么位置。

$$u_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{1/4}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

2. 已知一系统的传递函数为

$$\frac{a}{bs+1}, \quad a,b > 0$$

求其 2- 范数和 ∞- 范数。

3. 已知一系统的传递函数为

$$\frac{1}{2s+1}$$

其输入信号为

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

计算其输出信号的各种范数及其 pow。

4. 证明表 1.2 中的 (1, 3) 项，(2, 2) 项和 (2, 3) 项。

5. 已知一系统的传递函数为

$$\frac{s}{2s+1}$$

其输入输出信号分别为 $u(t)$ 和 $y(t)$，计算

$$\sup_{\|u(t)\|_\infty=1} \|y(t)\|_\infty$$

并求出这一上确界对应的输入。

参考文献

[1] 周克敏, Doyle J C, Glover K. 鲁棒与最优控制. 毛剑琴, 钟宜生, 林岩等译. 北京：国防工业出版社, 2006.

[2] 姜长生, 吴庆宪, 陈文华, 王从庆. 现代鲁棒控制基础. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社, 2005.

[3] 贾英民. 鲁棒 H_∞ 控制. 北京：科学出版社, 2007.

[4] 解学书, 钟宜生. H_∞ 控制理论. 北京：清华大学出版社, 1994.

[5] Doyle J C, 弗朗西斯 B A, 坦嫩鲍姆 A R. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京：清华大学出版社, 1993.

第 2 章　频域的稳定性概念

本章从基本控制系统出发，研究了其稳定性并得到其充分必要条件。接着把跟踪作为一种性能指标来讨论，研究了系统对某些信号渐近跟踪的能力。

2.1　基本反馈系统

考察下面的基本反馈系统，其中 P 表示控制对象，C 表示设计的控制器，F 是测量系统输出的观测器。注意到系统中的三个部分都有两个输入信号 (一个来自系统内部，一个来自系统外部) 和一个输出信号。r 是参考输入，d 和 n 是系统外部扰动输入，u 是控制信号，y 是系统输出，v 是观测器输出。下面研究图 2.1 所示系统的输入输出关系，假定每一部分都是线性的，在这种情况下，输入是一个二维向量，输出是输入的线性函数。例如，控制对象的输入输出关系为

$$y = P\begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}$$

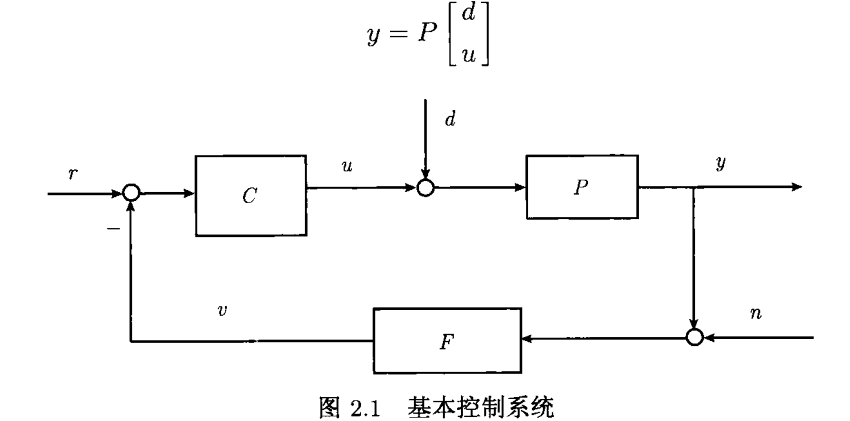


图 2.1　基本控制系统

进一步，将 P 矩阵分块为 $P = [\,P_1 \quad P_2\,]$，可得

$$y = P_1 d + P_2 u$$

为了简化问题，本章假设三个部分的输出都是它们输入的和 (或差) 的线性函数，也即，系统中三个部分的方程为

$$\begin{aligned} y &= P(d+u) \\ v &= F(y+u) \\ u &= C(r-v) \end{aligned}$$

最后一个方程中的“−”是一个习惯的表示。这几个方程对应的方框图如图 2.2 所示。下面给出关于系统输入输出关系的几个定义。

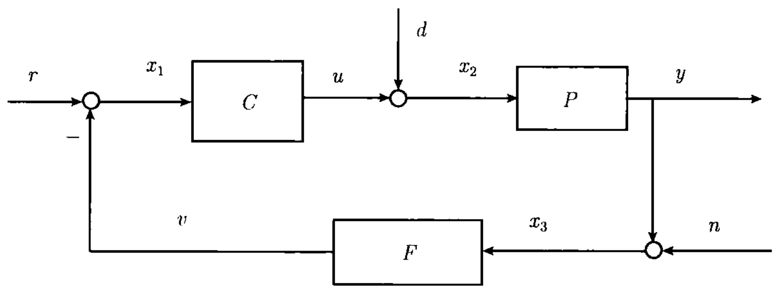


图 2.2 基本反馈回路

定义 2.1 (弱良定性) 图 2.2 中所有闭环传递函数都存在，即从三个外部输入到所有内部信号 u, y, v 以及求和点的输出之间的传递函数都存在，我们称系统具有弱良定性。

为了考察系统的弱良定性，我们只需考察从 r, d, n 到 x_1, x_2, x_3 的 9 个传递函数，其他几个传递函数可从这 9 个传递函数得到。各求和点的方程为

$$x_1 = r - Fx_3$$

$$x_2 = d + Cx_1$$

$$x_3 = n + Px_2$$

或者

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

从这个方程中可以看出：系统是弱良定的，当且仅当上面方程中的矩阵是非奇异的，即 $1 + PCF$ 不恒等于 0。系统的 9 个传递函数可通过下面方程得到：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

定义 2.2 (强良定性) 当式 (2.1) 中的 9 个传递函数都是正则的，我们称系统是强良定的。

显而易见，强良定性的前提是要求 P, C 和 F 是正则的，并且强良定性的充分必要条件是 $1+PCF$ 不是严格正则的 ($PCF(\infty) \neq -1$)。

性质 2.1 如果 P, C 和 F 是正则的，并且其中之一是严格正则的，那么反馈系统就是强良定性的。

证明 不失一般性，假设 P 是严格正则的，令

$$P = \frac{N_P}{M_P}, \quad C = \frac{N_C}{M_C}, \quad F = \frac{N_F}{M_F}$$

则

$$1 + PCF = \frac{N_P N_C N_F + M_P M_C M_F}{M_P M_C M_F}$$

可见如果 P 是严格正则的，$1+PCF$ 一定是双正则的。 □

在本书中，一般假设：P 是严格正则的，C 和 F 是正则的，即系统是强良定的。

2.2 内 稳 定

对于一个系统，仅仅看输入–输出传递函数是不够的，即便这个传递函数是稳定的，它也仅能保证系统存在有界的输入时，输出信号是有界的，却不能保证系统内部的每一个状态变量都有界。如果内部存在无界信号时，就可能会引起物理系统内部结构的毁坏。这便是下面将要介绍的内稳定问题。

定义 2.3 (内稳定) 对于基本反馈回路，当 r, d, n 到 x_1, x_2, x_3 的所有传递函数均稳定时，称系统是内稳定的。

内稳定的一个结果是：如果外部输入信号的幅值有界，那么 x_1, x_2 和 x_3 以及 u, y 和 v 都是有界的。因此，对所有有界的外部信号，内稳定确保内部信号是有界的 (保证系统的安全性)。

例 2.1 在图 2.2 中，假设

$$C(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad P(s) = \frac{1}{s^2-1}, \quad F = 1$$

判断系统是否为内稳定的。

检验从 r 到 y 以及从 d 到 r 的传递函数。

$$\frac{y}{r} = \frac{PC}{1+PCF} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{P}{1+PCF} = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

从 r 到 y 的传递函数是稳定的，但从 d 到 r 是不稳定的，因此反馈系统不是内稳定的。这种情况是由于控制器的零点和对象的极点在 $s=1$ 相消引起的，即

$$F=\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s^2-1}=\frac{s-1}{(s+1)^2(s-1)}$$

从图 2.2 所示的基本反馈系统可以看出，系统是内稳定的当且仅当式 (2.1) 中的 9 个传递函数都是稳定的。直接考察 9 个传递函数的稳定性比较麻烦，下面将给出一种更简单的方法。将 P, C, F 写成互质多项式 (即分子分母没用共同的因子) 的比

$$P=\frac{N_P}{M_P},\quad C=\frac{N_C}{M_C},\quad F=\frac{N_F}{M_F}$$

反馈系统的特征多项式定义为

$$N_PN_CN_F+M_PM_CM_F$$

闭环系统的极点就是特征多项式的零点。下面我们从闭环系统的极点研究系统的内稳定性。

定理 2.1 反馈系统是内稳定的，当且仅当没有闭环极点 (即 $N_PN_CN_F+M_PM_CM_F$ 的零点) 在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$。

证明 将 P, C, F 的互质多项式代入到式 (2.1) 中，整理得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{N_PN_CN_F+M_PM_CM_F}\begin{bmatrix}M_PM_CM_F & -N_PM_CN_F & -M_PM_CN_F\\ M_PN_CM_F & M_PM_CM_F & -M_PN_CN_F\\ N_PN_CM_F & N_PM_CM_F & M_PM_CM_F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\d\\n\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

充分性证明。显然，如果系统的闭环极点，即 $N_PN_CN_F+M_PM_CM_F$ 的零点，都不在复平面的闭右半平面，则式 (2.2) 中的 9 个传递函数都是稳定，因此系统内稳定。

必要性证明。假定系统是内稳定的，那么式 (2.2) 中的 9 个传递函数都是稳定的，即它们没有极点在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$，但这并不能立即断定 $N_PN_CN_F+M_PM_CM_F$ 没有零点在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$，因为即使这个多项式存在一个闭右半平面的零点，如果这 9 个传递函数的分子也恰好存在同样的零点，那么它们相消之后仍然可以得到 9 个稳定的传递函数。由此可知，要使 $N_PN_CN_F+M_PM_CM_F$ 没有零点在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$，必须得保证式 (2.2) 中 9 个传递函数的分子分母没有在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$ 的共同零点。下面将接着证明这一论断。首先，我们假设式 (2.2) 中的某个传递函数，如

$$\frac{M_PM_CM_F}{N_PN_CN_F+M_PM_CM_F}$$

分子分母同时存在一个在 $\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$ 的零点，记为 $s_0, \mathrm{Re} s_0\geqslant 0$，即 $M_PM_CM_F$ 和 $N_PN_CN_F$ 都存在一个因子 $(s-s_0)$，再假设该项因子存在于 M_P 中，根据互质性可知，N_P 中不存在该项因子，于是 N_CN_F 中必存在该因子。进一步得 $N_PM_CM_F$ 或 $N_PM_CN_F$ 中必不存在该项因子。那么传递函数

$$\frac{N_PM_CM_F}{N_PN_CN_F+M_PM_CM_F}$$

或者

$$\frac{N_P M_C N_F}{N_P N_C N_F + M_P M_C M_F}$$

分母中的不稳定极点无法被分子中的因子相消，于是该传递函数是不稳定的。事实上，无论假设 9 个传递函数中的哪一个为不稳定的，都会导致另外一个传递函数不稳定，这就与系统内稳定的假设矛盾，所以这 9 个传递函数的分子分母都不存在相同的闭右半平面零点。 □

定理 2.2　反馈系统是内稳定的，当且仅当下面两个条件成立：

(1) 传递函数 $1 + PCF$ 没有零点在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$;

(2) 乘积 PCF 在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 没有零极点相消。

证明　根据前面内容可知，反馈系统是内稳定的，当且仅当式 (2.1) 中的 9 个传递函数都是稳定的。

充分性证明。假定定理中的 (1) 和 (2) 都成立，将 P, C, F 写成互质多项式之比的形式

$$P = \frac{N_P}{M_P}, \quad C = \frac{N_C}{M_C}, \quad F = \frac{N_F}{M_F}$$

令 s_0 是特征多项式的零点，即

$$(N_P N_C N_F + M_P M_C M_F)(s) = 0 \tag{2.3}$$

下面将证明该多项式的零点必在复平面的左半平面，即 $s_0 < 0$。假设 $s_0 \geqslant 0$。如果 $(M_P M_C M_F)(s) = 0$，那么由式 (2.3) 可知 $(N_P N_C N_F)(s) = 0$。这就与定理中的条件 (2) 矛盾。如果 $(M_P M_C M_F)(s) \neq 0$，用它去除 (2.3) 中的方程，有

$$\left(1 + \frac{N_P N_C N_F}{M_P M_C M_F}\right)(s) = 0$$

即 $(1 + PCF)(s) = 0$，这又与定理中的条件 (1) 矛盾。由此可见，只要定理中的条件成立，则必有 $s_0 < 0$，即特征多项式的零点必在左半平面。于是可知系统是内稳定的。

必要性证明。假设系统是内稳定的，那么 $(1 + PCF)^{-1}$ 必须是稳定的，即 $1 + PCF$ 没有零点在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$。这就证明了定理中的 (1)。将 P, C, F 写成上面所示的互质因子的形式。由定理 2.1 可知，特征多项式 $N_P N_C N_F + M_P M_C M_F$ 没有零点在 $s_0 \geqslant 0$。因此，N_P 和 M_P, M_C, M_F 中的任何一个都没有共同的零点在 $s_0 \geqslant 0$ (否则，特征多项式在 $s_0 \geqslant 0$ 存在零点)。同理 N_C, N_F 也不可能和 M_P, M_C, M_F 有共同的零点在 $s_0 \geqslant 0$。这就证明了 $N_P N_C N_F$ 和 $M_P M_C M_F$ 在 $s_0 \geqslant 0$ 没有共同的零点，即定理中的 (2)。 □

2.3 Nyquist 判据

本节再从定理 2.2 及幅角原理推导出 Nyquist 判据，该判据是根据开环传递函数的频率特性来判定闭环反馈系统稳定性的方法。为了简便起见，下面只讨论单输入单输出系统的 Nyquist 判据。

考虑图 2.3 所示的单位反馈系统

$$P(s)=\frac{N_P(s)}{M_P(s)},\quad C(s)=\frac{N_C(s)}{M_C(s)}$$

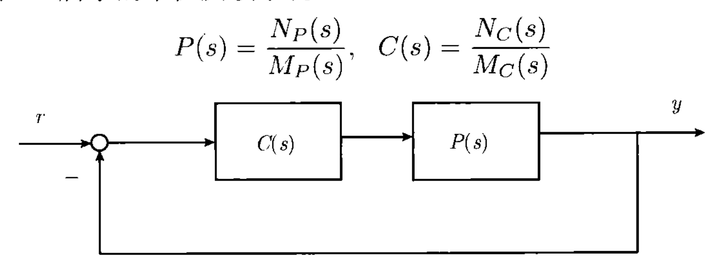


图 2.3 单位反馈回路

其中 $N_P(s), M_P(s), N_C(s)$ 和 $M_C(s)$ 均为关于 s 的多项式。考虑到物理的可实现性，假设对象 $P(s)$ 和控制器 $C(s)$ 均为严格真有理传递函数。该闭环系统的传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$

显然有

(1) $1+P(s)C(s)$ 的极点与 $P(s)C(s)$ 的极点相同。

(2) 闭环传递函数 $\Phi(s)$ 的极点与 $1+P(s)C(s)$ 的零点相同。

从上节内容可知，闭环系统的稳定性取决于 $\Phi(s)$ 的极点在 s 平面的分布情况。因此，判断该系统的稳定性需要求解多项式方程 $1+P(s)C(s)=0$ 的根，即需求解

$$N_P(s)N(c)+M_P(s)M_C(s)=0$$

的根。对于高阶系统，求解该方程常常比较困难。为了避免求解该方程，Nyquist 判据给出了另外一种方法：根据开环传递函数 $P(s)C(s)$ 的极点分布，来判断闭环系统特征多项式在 s 右半平面的根的数目。

引理 2.1 (幅角原理) 设复变函数

$$\omega=\phi(s)$$

在区域 Ω 内除了有限个孤立点以外均是解析的，在 Ω 的边界 Γ 上 $\phi(s)$ 连续且不为零，则 $\phi(s)$ 在 Ω 内零点总数 Z 和极点总数 P 之差，等于 s 沿 Γ 正方向上运行一周时，$\omega=\phi(s)$ 在 ω 平面绕过原点的总圈数 M，即

$$M=Z-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\phi(s)$$

其中 $\Delta_\Gamma \arg\phi(s)$ 表示 $\phi(s)$ 沿 Γ 运行一周时的幅角差，多重极点和多重零点按重数计算。

需要注意的是，$M > 0$ 表示 $\phi(s)$ 的零点数超过极点数，反之亦然。

定理 2.3 (Nyquist 稳定判据)　对于图 2.3 所示的系统，若开环传递函数 $P(s)C(s)$ 在右半平面内有 p 个极点，其中 $s=0$ 为 v 重极点，则闭环系统稳定的充分必要条件是：当 ω 从 $-\infty$ 变化到 ∞ 时，开环频率特性曲线 $P(\mathrm{j}\omega)C(\mathrm{j}\omega)$ 包围点 $(-1,\mathrm{j}0)$ 的次数为 $P+\dfrac{v}{2}$。

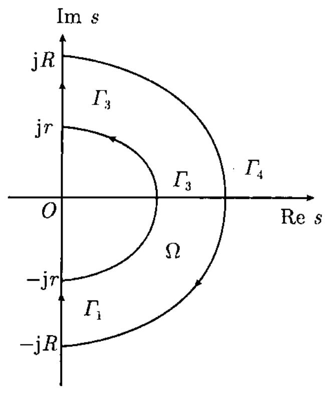


图 2.4　区域 Ω 及其边界

证明　如图 2.4 所示，考虑 s 平面中的区域 Ω，其边界由 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 和 Γ_4 组成，其中

Γ_1：从 $-\mathrm{j}R$ 到 $-\mathrm{j}r$ 的一段虚轴;

Γ_2：以 r 为半径的位于右半平面的半圆圈 (逆时针);

Γ_3；从 $\mathrm{j}r$ 到 $\mathrm{j}R$ 的一段虚轴;

Γ_4；以 R 为半径的位于右半平面的半圆圈 (顺时针);

这里的 r 和 R 均为适当的正数，使得 $P(s)C(s)$ 的 P 个极点均被包含在 Ω 之内。注意 $1+P(s)C(s)$ 与 $P(s)C(s)$ 有相同的极点，所以 $1+P(s)C(s)$ 在 Ω 内也有 P 个极点。假设 $1+P(s)C(s)$ 在 Ω 内有 Z 个零点。因此，当 s 沿 Γ 顺时针运行一周时，对 $1+P(s)C(S)$ 应用幅角原理，有

$$P-Z=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg[1+P(s)C(s)]$$

因为 $P(s)$ 和 $C(s)$ 均为有理函数，于是有

$$\Delta_{\Gamma_4} \arg[1+P(s)C(s)]=0$$

又因为 $s=0$ 是 $1+P(s)C(s)$ 的 v 重极点，从而当 r 充分小时，有

$$\Delta_{\Gamma_2} \arg[1+P(s)C(s)]\approx -v\pi$$

于是得

$$\Delta_{\Gamma_1} \arg[1+P(s)C(s)]+\Delta_{\Gamma_3} \arg[1+P(s)C(s)]\approx (P-N)2\pi+v\pi$$

令 $r\to 0$，$R\to\infty$，则有

$$\Delta_\Gamma \arg[1+P(s)C(s)]=(P-N)2\pi+v\pi$$

其中 $-\infty < \omega < +\infty$。

由于闭环系统稳定当且仅当其特征多项式在右半平面没有零点，即 $N = 0$。也就是说，闭环系统稳定当且仅当

$$\Delta_\Gamma \arg[1 + P(s)C(s)] = \left(P + \frac{v}{2}\right)2\pi$$

注意到，$1 + P(s)C(s)$ 绕过原点的圈数等于绕过点 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的圈数，定理得证。□

需要注意的是，当 $P(s)C(s)$ 在虚轴上有极点 $s = \mathrm{j}\omega_0$ $(\omega_0 \neq 0)$ 时，在构造闭环曲线 Γ 时，可以用半径充分小的半圆绕过该极点 (如定理证明中绕过原点一样) 的方法，同样可以得到类似的结论。

2.4 渐 近 跟 踪

本章从现在开始研究单位反馈系统，即 $F = 1$，系统的方框图如图 2.5 所示 $(F = 1)$，其中 e 为渐近跟踪误差，当 $n = d = 0$，e 等于参考输入 (理想的响应) r 与对象输出 (实际的响应) y 之差。本节研究当时间趋向无穷时，系统跟踪某些试验信号的能力。下面主要讨论阶跃信号

$$r_1(t) = \begin{cases} c, & t \geqslant 0 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

图 2.5 单位反馈回路

和斜坡信号

$$r_2(t) = \begin{cases} ct, & t \geqslant 0 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

其中 c 是一非零实数。从参考输入 r 到系统输出 y 之间的传递函数为

$$\frac{y}{r} = \frac{PC}{1 + PC} \stackrel{\text{def}}{=} T$$

从参考输入 r 到跟踪误差 e 之间的闭环传递函数为

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{1 + PC} \stackrel{\text{def}}{=} S$$

对于传递函数 P 的摄动 ΔP，将引起 T 的摄动 ΔT，则相对摄动的比

$$\lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P}\frac{P}{T}$$

表示了 T 对 P 的变化敏感程度。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P}\frac{P}{T} &= \frac{C}{(1+PC)^2}\frac{1+PC}{PC}P \\ &= \frac{1}{1+PC} \\ &= S\end{aligned}$$

定义 2.4 (敏感函数)　闭环传递函数 T 对 P 的无限小摄动的灵敏度称为系统的敏感函数。

定义 2.5 (补敏感函数)　$T = 1 - S$ 称为系统的补敏感函数。

从上面的分析可知，S 就是系统的敏感函数。系统的敏感函数和补敏感函数存在着关系 $S + T = 1$。下面本节将介绍，系统渐近跟踪阶跃信号和斜坡信号的能力取决于敏感函数 S 在原点 $s = 0$ 处的零点数。

定理 2.4　假定反馈系统是内稳定的，且 $n = d = 0$，

(1) 对于 r_1 (阶跃信号)，系统渐近跟踪 $(t \to 0, e(t) \to 0)$，当且仅当 S 至少有一个零点在原点。

(2) 对于 r_2 (斜坡信号)，系统渐近跟踪，当且仅当 S 至少有两个零点在原点。

证明　如果 $y(s)$ 是一有理 Laplace 变换，除了可能有一单极点在原点以外，没有极点在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$，那么 $\lim\limits_{t\to 0} y(t)$ 存在且等于 $\lim\limits_{s\to 0} sy(s)$。(1)：

$$r_1(s) = \frac{c}{s},\quad e(s) = S(s)r_1(s) = \frac{c}{s}S(s)$$

由于系统是内稳定的，则 $S(s)$ 是一稳定的传递函数。根据终值定理

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{c}{s}S(s) = cS(0)$$

则

$$e(\infty) = 0 \Leftrightarrow S(s) = S(0)$$

即 S 至少有一零点在原点。(2)：$r_2(s) = \dfrac{c}{s^2}$，证明类似。□

例 2.2　在图 2.5 中，假设

$$P(s) = \frac{1}{s},\quad C(s) = 1$$

判断该系统的跟踪能力。

从 r 到 e 的传递函数等于

$$\frac{1}{1+s^{-1}} = \frac{s}{1+s}$$

那么该系统能跟踪阶跃信号，但不能跟踪斜坡信号。

该例中，开环极点 $s=0$ 成了闭环误差传递函数的零点，这一零点与 $r(s)$ 的极点相消，结果在 $r(e)$ 中便没有不稳定的极点。所以该系统能跟踪阶跃信号。斜坡信号输入的情况与此类似。

2.5 性　能

前面研究系统跟踪的时候仅考虑渐近跟踪单一的信号，现在考察不同输入信号的集合下，跟踪性能的量度。确定性能指标 (即跟踪特性好坏的量度)，取决于两方面的因素：一是我们知道多少 r 的信息；二是用什么方式来量测跟踪误差。通常 r 是预先未知的，但我们总要预先知道一组可能的输入，或至少为了设计的需要而假定预知的。首先考虑一组正弦信号，假定 $r(t)$ 是任意幅值不大于 1 的正弦信号

$$r(t) \in \{a\sin wt \mid \forall a \in (0,\ 1],\ \ \forall w \in \mathbb{R}_+\}$$

对应的 Laplace 变换为

$$R(s) \in \left\{ \frac{aw}{s^2+w^2} \middle| \ \forall a \in (0,\ 1],\ \ \forall w \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

我们希望跟踪误差 $e(t)$ 的幅值小于 ε，根据表 1.2 可知，$e(t)$ 的最大幅值等于它的传递函数的 ∞ 范数。由前面内容可知，从 $r(t)$ 到 $e(t)$ 的传递函数即使敏感函数 $S(\mathrm{j}w)$。那么性能指标就可以等价表示成 $\|S(\mathrm{j}w)\| \leqslant \varepsilon$。由 $e(t)=a|S(\mathrm{j}w)|\ \sin(wt+\arg(S(\mathrm{j}w)))$，则

$$\sup_t |e(t)| = \|e(t)\|_\infty = \sup_w |S(\mathrm{j}w)| = \|S(\mathrm{j}w)\|_\infty$$

即 $\|e(t)\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|S(\mathrm{j}w)\|_\infty < \varepsilon$。定义权函数 $W_1(\mathrm{j}w)=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则由 $W_1(\mathrm{j}w)S(\mathrm{j}w)=\dfrac{1}{\varepsilon}S(\mathrm{j}w)$，有

$$\|W_1 S\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon}\|S\|_\infty < 1$$

于是有

$$\|S\|_\infty < \varepsilon$$

进而可得

$$\|e\|_\infty < \varepsilon$$

以 $\|W_1 S\|_\infty$ 为跟踪性能的量度，将性能指标进行了标称化 (图 2.6)。一般地，这种处理可视为在参考输入信号后串联了一个滤波器。

下面再接着考虑任意能量 (在沿频率加权的意义下) 不大于 1 的输入信号如图 2.7 所示。

$$r(t) = \{W_1(s)r_0(s) \mid \|r_0(t)\|_2 \leqslant 1\}$$

$$\|e\|_2 \leqslant \|W_1S\|_\infty \|r_0\|_2 \Rightarrow \sup \|e\|_2 = \|W_1S\|_\infty$$

标称化地，令 $\|W_1S\|_\infty < 1$ 作为系统跟踪性能设计的指标，可保证 $\|e\|_\infty < 1$ 或 $\|e\|_2 < 1$。

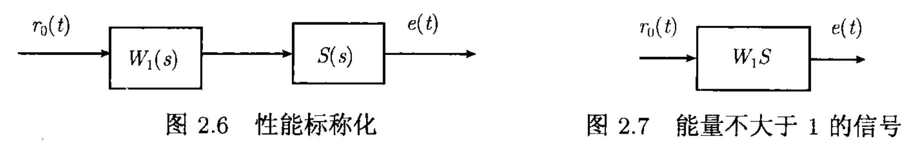


图 2.6　性能标称化　　图 2.7　能量不大于 1 的信号

2.6 注　记

本章内容由文献 [1] 的第 3 章整理而成，其中 2.3 节参考了文献 [2] 第 4 章的内容。

2.7 习　题

1. 考察图 2.2 中所示的基本反馈系统，已知

$$P(s) = \frac{1}{s+a}, \quad C(s) = \frac{1}{s}, \quad F(s) = 1$$

a 为一实数，求出保证系统内稳定的 a 的范围。

2. 在图 2.2 所示的基本反馈系统中，已知

$$P(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad C(s) = k, \quad F(s) = 1$$

求出最小的反馈增益 k 使得下面的结论都成立。(1) 反馈系统是内稳定的；(2) 当 $n = d = 0$ 且 $r(t)$ 为单位阶跃信号时，$\|e(\infty)\| \leqslant 0.2$。

3. 考虑图 2.2 中所示的基本反馈系统，已知 $r = n = 0$，$d(t) = \sin(wt)1(t)$。求证：如果反馈系统是内稳定的，那么 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ 当且仅当 P 有一个零点在 $s = \mathrm{j}w$ 或者 C 有一个极点在 $s = \mathrm{j}w$。

参 考 文 献

[1] Doyle J C, 弗朗西斯 B A, 坦嫩鲍姆 A R. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京：清华大学出版社, 1993.

[2] 梅生伟，申铁龙. 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用. 北京：清华大学出版社，2003.

第3章　不确定性描述与鲁棒性分析

对系统建的模型总是存在着不确定的因素。系统的不确定性有两个来源：一是来源于系统外部，表现为不可预知的干扰；另一类来源于系统内部，常常由于对系统运行规律的认识不清导致模型与真实系统之间存在着误差，或者由于简化系统模型而造成的不确定性。所以没有任何一个物理系统是可以用准确的数学模型来代表的。基于这一原因，我们必须知道建模误差对控制系统的性能可能会产生怎样的不利影响。本章开始论述各种不确定对象的模型，进而用小增益定理研究鲁棒稳定性，即在对象存在不确定性的情况下的稳定性问题。最后一个专题是鲁棒性能问题，在对象不确定的情形下确保跟踪目标的实现。

3.1　对象的不确定模型

不确定对象建模的基本方法是用一个集合 $\mathscr{P}$ 来代表对象的模型。根据不确定性产生的原因，我们将不确定系统分为：结构化不确定性和非结构化不确定性模型。

定义 3.1 (结构化不确定模型)　结构化不确定性又叫参数化不确定性。指的是系统的不确定性可以通过模型中有限个参数的摄动来描述。参数的摄动可能会改变系统的零极点分布进而影响系统的性能甚至稳定性，但不会改变系统的结构。

结构化不确定模型描述不确定性的来源和位置明确的情况。例如，考虑一个对象的模型

$$P(s)=\frac{1}{s^2+as+1}$$

其中常数 a 在某个区间 $[a_{\min},a_{\max}]$ 内，那么我们可以用下面的结构化集合来描述该不确定系统

$$\mathscr{P}=\left\{\left.\frac{1}{s^2+as+1}\right|\ a\in[a_{\min},\ a_{\max}]\right\}$$

这样的一类结构化不确定集合是由有限个参数来表示的 (本例仅一个参数 a)。还有一类结构化不确定性是离散化不确定性：以离散的对象模型的集合来表示对象模型。例如

$$P(s)=\left\{\frac{1}{s^2+as+1},\ \frac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{Ts+1},\ \frac{bs+1}{s^3+a_2s^2+a_1s+1}\right\}$$

定义 3.2 (非结构化不确定模型)　非结构化不确定模型描述系统“未建模动态”造成的不确定性，即系统的不确定性不能仅仅用有限个参数的摄动来表示，而是通过对象的整体摄动来表示。这种摄动不仅会改变系统的零极点分布和个数，通常还会改变系统的结构。

在实际工程设计中，非结构化不确定模型更加重要。这是基于两方面的原因：其一，参数化不确定性是建立在对系统内在规律的深刻认识基础上的，但是对系统的完全认识实际上是很难的。实际的系统都应当包括某些非结构化的不确定性才能覆盖未建模动态。因此非结构化不确定性更具一般性。其二，当系统中存在多个参数同时摄动，尤其是这些摄动之间彼此耦合的时候，用参数不确定性来描述系统的不确定性，其处理过程是非常复杂的。而用一些特定的非结构化不确定模型来描述系统不确定性时，如乘积不确定性，我们可以得到既简单又具有一般性的分析方法。

下面将进一步讨论具有不确定性线性系统的建模问题。对于线性系统，用标称系统的传递函数 $P(s)$ 及未知摄动 $\Delta(s)$ 来表征不确定系统。下面介绍几类常用不确定性系统的表达方式。为了符号简单，我们用 $P(s)$ 表示标称对象的传递函数，实际对象的传递函数为 $\tilde{P}(s)$。

乘积摄动模型　如图 3.1 所示，我们用一个集合来表示系统的模型，即

$$\tilde{P}(s) = [1 + \Delta(s)W_2(s)]\,P(s), \quad \|\Delta\|_\infty \leqslant 1$$

这里的 $\Delta(s)$ 和 $W_2(s)$ 是稳定的传递函数，且 $\|\Delta(s)\|_\infty \leqslant 1$，并且假设 $\Delta(s)$ 的摄动不会与 $P(s)$ 中不稳定极点相消 ($P(s)$ 和 $\tilde{P}(s)$ 具有相同的不稳定极点)，此时称 $\Delta(s)$ 是可容许的。$\Delta(s)$ 为尺度因子，$W_2(s)$ 是权函数。

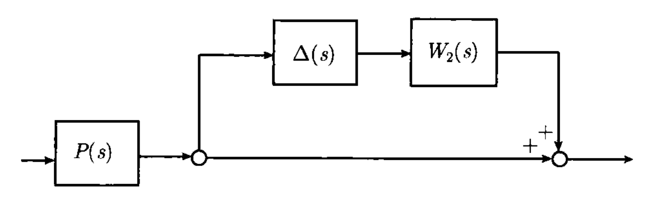


图 3.1　乘积摄动模型

从上述乘积摄动不确定性模型的描述中可以看出

$$\left|\frac{\tilde{P}(\mathrm{j}w)}{P(\mathrm{j}w)} - 1\right| = |\Delta(\mathrm{j}w)W_2(\mathrm{j}w)| \leqslant |W_2(\mathrm{j}w)|$$

对每个 w，上式表示一个以 $(1,\mathrm{j}0)$ 为圆心，$W_2(\mathrm{j}w)$ 为半径的圆。ΔW_2 是偏离 1 的标称化对象的摄动，即 ΔW_2 表示了不确定的范围。用该模型来描述不确定系统处理起来简单、规范，但是比较保守。

加性摄动模型　如图 3.2 所示，该不确定系统的传递函数为

$$\tilde{P}(s) = P(s) + \Delta W_2(s)$$

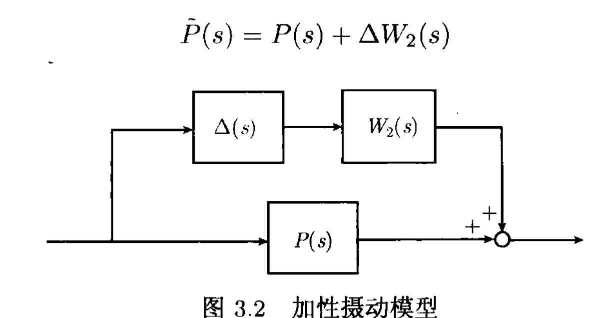


图 3.2　加性摄动模型

除性摄动模型　如图 3.3 所示，该系统模型用下面的传递函数集合表示：

$$\tilde{P}(s) = \frac{P(s)}{(1 + \Delta W_2(s))}$$

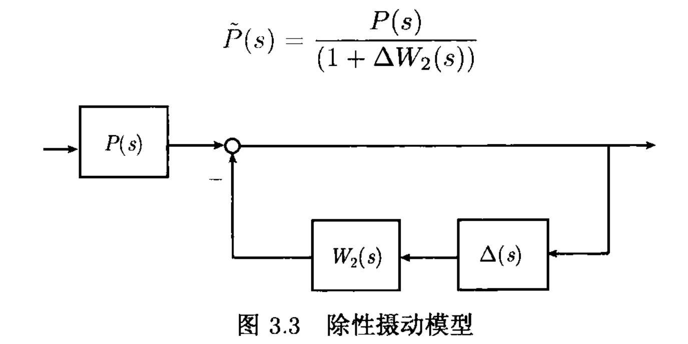


图 3.3　除性摄动模型

混合型摄动模型　如图 3.4 所示，其传递函数为

$$\tilde{P}(s) = \frac{P(s)(1 + \Delta_2 W_2(s))}{(1 + \Delta_1 W_1(s))}$$

在用每一种模型时都要对 Δ 和 $W_2(s)$ 作适当的假设。

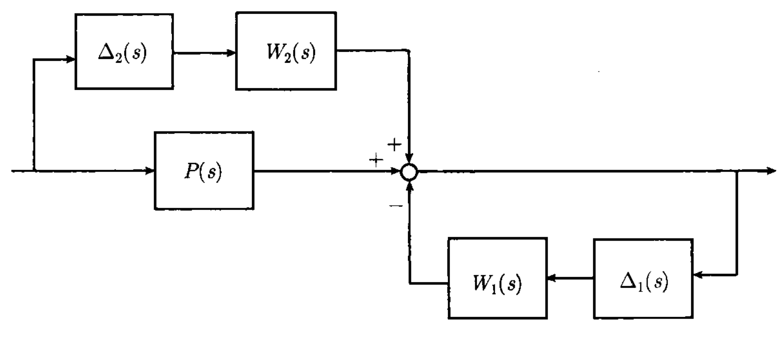


图 3.4　混合型摄动模型

上面介绍几种不确定模型中，我们用标称对象 $P(s)$ 和权函数 $W_2(s)$ 来表示系不确定系统。但是实际中我们是怎样来获得权函数 $W_2(s)$ 的呢？下面我们举例说明。

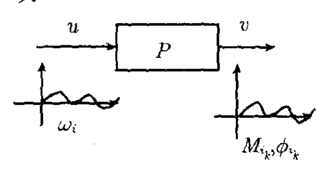


图 3.5 系统频响应特性

例 3.1 根据试验，获得稳定对象的频率响应特性 $\{w_i,(M_{i_k},\phi_{i_k})_{k=1}^n\}_{i=1}^m$，其中 i 为频率点的编号，k 为试验次数的编号。选取标称对象传递函数 $P(s)$，获得频率响应特性 $\{w_i,(M_i,\phi_i)\}_{i=1}^m$，如图 3.5、图 3.6 所示。

选取 $W_2(s)$，满足

$$|W_2(\mathrm{j}w_i)| \geqslant \left|\frac{M_{i_k}\mathrm{e}^{\phi_{i_k}}}{M_i\mathrm{e}^{\phi_i}}-1\right|, \quad i=1,\cdots,m, \quad k=1,\cdots,n$$

$$\Rightarrow \tilde{P}=(1+\Delta W_2)\,P$$

下面通过一个例子来研究结构化不确定性模型与非结构化不确定性模型之间的转换 (结构化不确定性模型嵌入非结构化不确定性模型)。

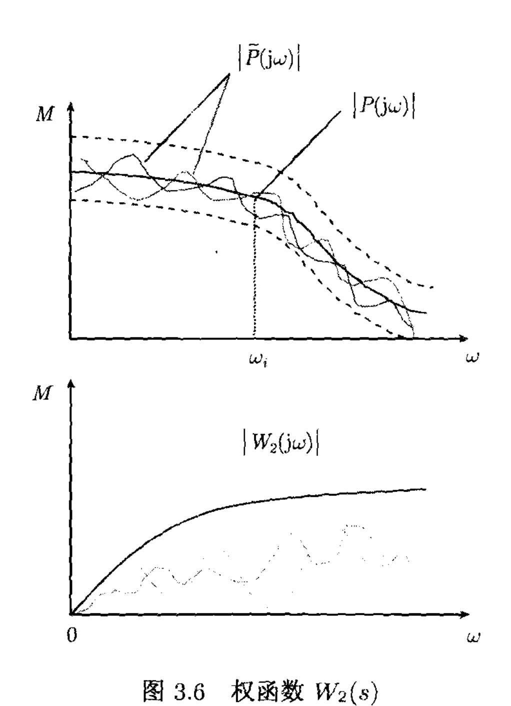


图 3.6 权函数 $W_2(s)$

例 3.2 设标称模型为

$$P(s)=\frac{1}{s^2}$$

如理想的直流电机便具有这样的传递函数。设实际对象含时间滞后，即

$$\tilde{P}(s)=\frac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{s^2}$$

其中 $\tau\in[0,\ 0.1]$。现将上述不确定性模型嵌入乘积摄动模型中。由

$$\left|\frac{\tilde{P}(\mathrm{j}w)}{P(\mathrm{j}w)}-1\right|=\left|\mathrm{e}^{-\tau \mathrm{j}w}-1\right|\leqslant|W_2(\mathrm{j}w)|,\quad \forall w,\ \forall\tau\in[0,\ 0.1]$$

画出 $\left|\mathrm{e}^{-\tau\mathrm{j}w}-1\right|$ 和 $|W_2(\mathrm{j}w)|$

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-\tau \mathrm{j}w}-1\right|&=\sqrt{2(1-\cos\tau w)}\\&=\begin{cases}0, & \tau w=2k\pi\\ 2, & \tau w=(2k+1)\pi\end{cases}\end{aligned}$$

选择

$$W_2(s)=\frac{0.21s}{0.1s+1}$$

这样便可以得到不确定系统的乘积摄动模型。

例 3.3 设实际对象传递函数

$$\tilde{P}(s)=\frac{k}{s-2}$$

其中 $k\in[0.1,\ 10]$，现将它嵌入乘积模型。令标称对象

$$P(s)=\frac{k_0}{s-2}$$

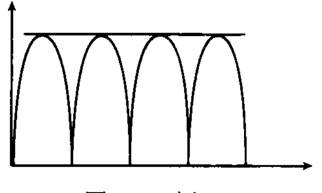


图 3.7 例 3.2

选择 $W_2(\mathrm{j}w)$ 满足

$$\left|\frac{\tilde{P}(\mathrm{j}w)-P(\mathrm{j}w)}{P(\mathrm{j}w)}\right|\leqslant|W_2(\mathrm{j}w)|$$

注意到

$$\left|\frac{\tilde{P}(\mathrm{j}w)}{P(\mathrm{j}w)}-1\right|=\left|\frac{k}{k_0}-1\right|$$

为取得最小上界，取

$$\begin{aligned}\min_{k_0}\max_{0.1\leqslant k\leqslant 10}\left|\frac{k}{k_0}-1\right|&=\left|\frac{10-5.05}{5.05}\right|\\&=\left|\frac{0.1-5.05}{5.05}\right|\\&=\frac{4.95}{5.05}\end{aligned}$$

则

$$W_2(s) = \frac{4.95}{5.05}, \quad P(s) = \frac{5.05}{s-2}, \quad \tilde{P}(s) = [1 + \Delta(s)W_2(s)]\, P(s)$$

从上述内容可以看出，在系统建模的过程中，实际对象的模型可能属于某个对象的集合，但是这个集合可能在数学上难以处理，因此我们把他嵌入到一个容易处理的较大的集合中。显而易见，这样以来虽然具有保守性，但是带来了处理的方便。乘积不确定模型并不适合所有的情况，因为覆盖不确定性集合的圆有时是一种太过于粗糙的近似。这种情况下根据乘积不确定性模型设计的控制器相对于原来的不确定模型就可能太过于保守了。

3.2　鲁棒稳定性

在研究不确定系统的时候，常常假设系统的传递函数属于一个集合 $\mathscr{P}$，在对该系统进行分析的时候，就需要用到鲁棒性的概念。

定义 3.3 (鲁棒性)　假设对象属于一个集合 $\mathscr{P}$，给定一个控制器，如果该控制器使得对象集合中的每一个对象都具有某种特性，则称该控制器对此特性具有鲁棒性。

因此谈到鲁棒性必定要求有一个对象的集合，一个控制器和某些系统的特性。一般说来，鲁棒性分为鲁棒稳定性和鲁棒性能。

定义 3.4 (鲁棒稳定性)　一个控制器 C，如果对集合 $\mathscr{P}$ 中的每一个对象都能保证反馈系统内稳定，则称该控制器具有鲁棒稳定性。

下面将针对不确定系统的各种模型，分别研究其鲁棒稳定性。

定理 3.1　设对象不确定性满足乘积摄动模型，即

$$\mathscr{P} = \left\{ \tilde{P}(s)\,[1 + \Delta(s)W_2(s)]\, P(s) \,\middle|\, \|\Delta\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

设控制器 C 使标称对象 P 内稳定，则控制器 C 使 $\tilde{P}$ 内稳定的充分必要条件为 $\|W_2T\|_\infty < 1$，其中 T 为标称系统的补敏感函数 $T = \dfrac{PC}{1+PC}$。

证明　充分性证明。已知 $\|W_2T\|_\infty < 1$，定义 $L = PC$ 表示标称系统的开环传递函数，用 $\tilde{L}$ 表示摄动系统的开环传递函数，则有

$$\begin{aligned}\tilde{L} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{P}C \\ &= (1+\Delta W_2)PC \\ &= (1+\Delta W_2)L\end{aligned}$$

构造 L 的 Nyquist 图，将围线 $\mathscr{D}$ 在虚轴上的极点处增加凹槽向左绕过去。由于标称系统是内稳定的，根据 Nyquist 稳定性判据可知，L 的 Nyquist 图不经过 -1 点，且逆时针方向包围 -1 点的圈数等于 P 在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 的极点数加上 C 在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 的极点数。构造摄动系统 $\tilde{L}$ 的 Nyquist 图，由于 ΔW_2 的引进不会增加虚轴上的极点，故 $\tilde{L}$ 的 Nyquist 图不需增加虚轴上的凹槽数。需要证明 $\tilde{L}$ 的 Nyquist 图不经过 -1 点，且逆时针方向包围 -1 点的圈数等于 $(1+\Delta W_2)P$ 在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 的极点数加上 C 在 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 的极点数。换句话说，需要证明 $\tilde{L}$ 的 Nyquist 图不经过 -1 点，且包围 -1 点的圈数与 L 的 Nyquist 图相同。注意到 $L(\mathrm{j}\omega)$ 不通过 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点，而 Δ 可容许的，因此 $\tilde{L}(\mathrm{j}w)$ 也不通过 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点，另外

$$\begin{aligned}\|\Delta W_2 T\|_\infty &= \sup_\omega |\Delta(\mathrm{j}\omega) W_2(\mathrm{j}\omega) T(\mathrm{j}\omega)| \\ &\leqslant \sup_\omega |\Delta(\mathrm{j}\omega)| \sup_\omega |W_2(\mathrm{j}\omega) T(\mathrm{j}\omega)| \\ &= \|W_2 T\|_\infty < 1\end{aligned}$$

令 $\tilde{F} = 1 + \tilde{L}$ 和 $F = 1 + L$ 分别表示摄动系统和标称系统的闭环特征多项式，有

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= 1 + \tilde{L} \\ &= 1 + (1 + \Delta W_2) L \\ &= (1 + L) + \Delta W_2 L \\ &= (1 + L) + \Delta W_2 L \frac{1 + L}{1 + L} \\ &= (1 + L) + \Delta W_2 T (1 + L) \\ &= (1 + \Delta W_2 T) F\end{aligned} \tag{3.1}$$

因为

$$\|\Delta W_2 T\|_\infty \leqslant \|W_2 T\|_\infty < 1$$

对于围线 $\mathscr{D}$ 上的所有点 s，$1 + \Delta W_2 T(\mathrm{j}\omega)$ 总是位于以 1 为圆心，半径小于 1 的闭圆内，相位角变化 <360°。根据式 (3.1) 可知，当 s 绕 $\mathscr{D}$ 一圈时，$\tilde{L}(\mathrm{j}\omega)$ 围绕 $(-1,\mathrm{j}0)$ 的圈数和 $L(\mathrm{j}\omega)$ 围绕 $(-1,\mathrm{j}0)$ 的圈数相同。则摄动系统内稳定。

必要性证明。用反证法。设 $\|W_2 T\|_\infty = k \geqslant 1$，假定 $\omega^* = 0$ 处，有

$$|W_2(\mathrm{j}\omega^*) T(\mathrm{j}\omega^*)| = k$$

若取 $\Delta = -\dfrac{1}{k}$ (满足 $\|\Delta\|_\infty \leqslant 1$)，则在 ω^* 处，有

$$1 + \Delta W_2(\mathrm{j}\omega) T(\mathrm{j}\omega) = 1 - \frac{1}{k} \cdot k = 0$$

由于 $\tilde{F}=(1+\Delta W_2T)F$，则在 ω^* 处，$\tilde{F}(\mathrm{j}\omega^*)=0$，即 $L(\mathrm{j}\omega)$ 通过 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点。则摄动系统不稳定。 □

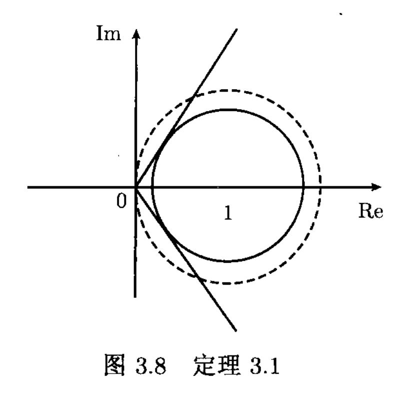


图 3.8　定理 3.1

根据该定理，我们可以定义一个系统的稳定裕量，设系统不确定性满足以下模型：

$$\wp(\beta)=\left\{\tilde{P}=(1+\Delta W_2)P\,|\,\|\Delta\|_\infty\leqslant\beta\right\}$$

给定控制器 C，设 C 使标称对象 P 内稳定，若存在一个最大的 β_{sup} 使得，对于每一个 $P\in\wp(\beta_{\text{sup}})$，$C$ 均使得 P 内稳定，则称 β_{sup} 为乘积摄动模型下的稳定裕度。定理 3.1 可用于寻找乘积摄动模型下的稳定裕度。由

$$\left\{\tilde{P}=(1+\Delta W_2)P|\,\|\Delta\|_\infty\leqslant\beta\right\}$$

等价于

$$\left\{\tilde{P}=\left(1+\Delta W_2'\right)P\Big|\left\|\Delta'\right\|_\infty\leqslant 1\right\}$$

其中

$$\Delta'=\frac{1}{\beta}\Delta,\quad W_2'=\beta W_2$$

则由定理 3.1，摄动系统 $\wp(\beta)$ 的内稳定的充分必要条件为

$$\left\|W_2'T\right\|_\infty=\|\beta W_2T\|_\infty<1$$

即 $\|W_2T\|_\infty<\dfrac{1}{\beta}$。则可取

$$\begin{aligned}\beta_{\text{sup}}&=\sup_\beta\{\beta\,|\,\|\beta W_2T\|_\infty<1\}\\&=\sup_\beta\{\beta\,|\,\beta\cdot\|W_2T\|_\infty<1\}\\&=\frac{1}{\|W_2T\|_\infty}\end{aligned}$$

条件 $\|W_2T\|_\infty<1$ 也可以用图形来解释。注意到

$$\begin{aligned}\|W_2T\|_\infty<1&\Leftrightarrow\left|\frac{W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega)}{1+L(\mathrm{j}\omega)}\right|<1,\quad\forall\omega\\&\Leftrightarrow|W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega)|<|1+L(\mathrm{j}\omega)|,\quad\forall\omega\end{aligned}\tag{3.2}$$

最后一个不等式表明，在每一个频率下，临界点 -1 都位于以 $L(\mathrm{j}\omega)$ 为圆心，以 $|W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega)|$ 为半径的圆外，如图 3.9 所示。

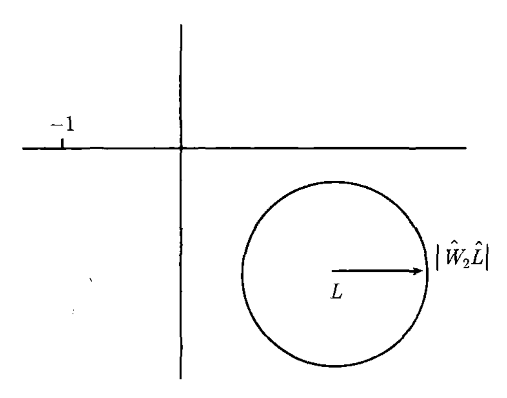


图 3.9 图示鲁棒稳定性

定理 3.2 考虑加性摄动不确定系统

$$\tilde{P} = P + \Delta W_2$$

设控制器 C 使标称对象 P 内稳定，则控制器 C 使得该不确定系统鲁棒稳定的充要条件为 $\|W_2CS\|_\infty < 1$。

证明 充分性证明。由于标称反馈系统是内稳定的，其开环传递函数 $L = PC$ 的 Nyquist 图不经过 $(-1, \mathrm{j}0)$ 点，并且其逆时针包围该点的圈数等于 P，C 在闭右半平面的极点数之和。由于允许的摄动 Δ 不改变 P 的任何不稳定极点，若要保证系统摄动后仍然是内稳定的，只需要摄动后的开环传递函数

$$\tilde{L} = \tilde{P}C = (P + \Delta W_2)C$$

的 Nyquist 图逆时针包围 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的圈数和 L 一样。由

$$\begin{aligned} 1 + \tilde{L} &= 1 + L + \Delta W_2 C \\ &= (1 + L)\left(1 + \frac{\Delta W_2 C}{1 + L}\right) \\ &= (1 + L)(1 + \Delta W_2 CS) \end{aligned}$$

并注意到

$$\begin{aligned} \|\Delta W_2 CS\|_\infty &\leqslant \|\Delta\|_\infty \|W_2 CS\|_\infty \\ &\leqslant \|W_2 CS\|_\infty \\ &< 1 \end{aligned}$$

所以 $(1 + \Delta W_2 CS)$ 总是位于以 1 为圆心，半径小于 1 的闭圆内，于是 $1 + \tilde{L}$ 的幅角变化等于 $1 + L$ 的幅角变化，因而不会改变包围的圈数。所以不确定系统仍然是稳定的。充分性得证。

下面采用反证法证明必要性。假定 $\|W_2CS\|_\infty \geqslant 1$，并存在频率 ω^*，使得

$$|W_2(\mathrm{j}\omega^*)C(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)| = 1$$

在复平面内，复向量 $W_2(\mathrm{j}\omega^*)C(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)$ 的幅值为 1，相角记为 $\varphi^*(W_2CS)$，如图 3.10 中的实线所示。取

$$\Delta(\mathrm{j}\omega^*) = \frac{-1}{W_2(\mathrm{j}\omega^*)C(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)}$$

其幅值也为 1，相角为 $-\pi - \varphi^*(W_2CS)$，如图 3.10 中的虚线所示。显然 $\Delta(\mathrm{j}\omega^*)$ 是允许的，且有

$$1 + (\Delta W_2CS)\,|_{\omega=\omega^*} = 0$$

于是 $1+\tilde{L}$ 的 Nyquist 图会通过临界点，这样的摄动系统不是内稳定的，与假设矛盾。因此假定不成立。 □

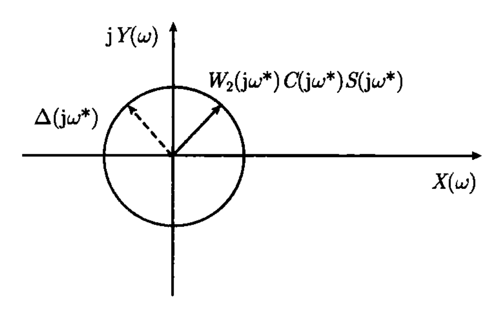


图 3.10　构造 Δ 示意图

定理 3.3　考虑除性摄动不确定系统

$$\tilde{P} = \frac{P}{1+\Delta W_1}$$

设控制器 C 使标称对象 P 内稳定，则控制器 C 使得该不确定系统鲁棒稳定的充要条件为 $\|W_2S\|_\infty < 1$。

证明　该证明的一个关键方程为

$$\begin{aligned}1+\tilde{L} &= 1 + \frac{P}{1+\Delta W_2}C \\ &= \frac{(1+L)(1+\Delta W_2S)}{1+\Delta W_2}\end{aligned}$$

具体证明过程留作课后练习。 □

引理 3.1　$\||W_1S| + |W_2T|\|_\infty < 1$ 与下面两组不等式均等价：

$$(1)\begin{cases}\|W_2T\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_1S}{1-|W_2T|}\right\|_\infty < 1\end{cases}$$

$$
(2)\begin{cases} \|W_1S\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_2T}{1-|W_1S|}\right\|_\infty < 1 \end{cases}
$$

证明 由于引理中的 (1) 和 (2) 在形式上具有对偶性，其证明过程完全类似。这里只证明 (1)。

必要性证明：因为 $\|\,|W_1S|+|W_2T|\,\|_\infty<1$，根据无穷范数定义可得

$$||W_1S|+|W_2T||<1$$

进一步可得

$$|W_1S|+|W_2T|<1$$

于是有

$$\begin{cases} |W_2T|<1 \\ |W_1S|<1-|W_2T| \end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases} \|W_2T\|_\infty<1 \\ \dfrac{|W_1S|}{1-|W_2T|}<1 \Rightarrow \left\|\dfrac{|W_1S|}{1-|W_2T|}\right\|_\infty<1 \end{cases}$$

充分性证明：因为 $\|W_2T\|_\infty<1$，由无穷范数定义可得 $|W_2T|<1$；同理，因为

$$\left\|\frac{|W_1S|}{1-|W_2T|}\right\|_\infty<1$$

可得

$$\left|\frac{|W_1S|}{1-|W_2T|}\right|<1$$

又因为 $|W_2T|<1$，于是有

$$|1-|W_2T||=1-|W_2T|$$

经整理得

$$|W_1S|<1-|W_2T|$$

从而有

$$|W_1S|+|W_2T|<1$$

所以 $\||W_1S|+|W_2T|\|_\infty<1$。 □

定理 3.4 考虑混合摄动不确定系统

$$\tilde{P}=P\frac{1+\Delta_2W_2}{1+\Delta_1W_1}$$

设控制器 C 使标称对象 P 内稳定，则控制器 C 使得该不确定系统鲁棒稳定的充要条件为

$$\||W_1S|+|W_2T|\|_\infty<1$$

证明 为了定理证明的方便，先推导出下面 3 个系统鲁棒稳定的条件。

(1) 假设 Δ_1 固定，令标称对象为 $P_1 = P(1+\Delta_2 W_2)$，设不确定系统为

$$\tilde{P} = \frac{P_1}{1+\Delta_1 W_1}$$

根据定理 3.3，该系统鲁棒稳定的条件为 $\|W_1 S_1\|_\infty < 1$，其中

$$S_1 = \frac{1}{1+P_1 C} = \frac{S}{1+\Delta_2 W_2 T}$$

于是鲁棒稳定条件可等价改写为

$$\left\| W_1 \frac{S}{1+\Delta_2 W_2 T} \right\|_\infty < 1$$

(2) 假设 Δ_2 固定，令标称对象为 $P_2 = P\dfrac{1}{1+\Delta_1 W_1}$，设不确定系统为

$$\tilde{P} = P_2(1+\Delta_2 W_2)$$

根据定理 3.1，该摄动系统鲁棒稳定的条件为 $\|W_2 T_2\|_\infty < 1$，其中

$$T_2 = \frac{P_2 C}{1+P_2 C} = \frac{T}{1+\Delta_1 W_1 S}$$

因此，鲁棒稳定条件可等价改写为

$$\left\| W_2 \frac{T}{1+\Delta_1 W_1 S} \right\|_\infty < 1$$

(3) 当 Δ_1, Δ_2 均不固定时，系统鲁棒稳定要求条件 (1) 和条件 (2) 均满足。$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1$ 等价于

$$\begin{cases} \|W_1 S\|_\infty < 1 \\ \left\| W_2 \dfrac{T}{1+\Delta_1 W_1 S} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \|W_2 T\|_\infty < 1 \\ \left\| W_1 \dfrac{S}{1+\Delta_2 W_2 T} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

根据引理 3.1 可知，为了证明 (3) 中的关系，需证明：

$$\left\| W_1 \frac{S}{1+\Delta_2 W_2 T} \right\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left\| W_1 \frac{S}{1-|W_2 T|} \right\|_\infty < 1$$

以及

$$\left\|W_2\frac{T}{1+\Delta_1 W_1 S}\right\|_\infty<1\Leftrightarrow\left\|W_2\frac{T}{1-|W_1 S|}\right\|_\infty<1$$

由于其对偶性，这里只证明前者。

充分性证明。对所有的 Δ，有

$$\begin{aligned}1&=|1+\Delta W_2 T-\Delta W_2 T|\\&\leqslant|1+\Delta W_2 T|+|\Delta W_2 T|\\&\leqslant|1+\Delta W_2 T|+|W_2 T|\end{aligned}$$

于是有

$$|1+\Delta W_2 T|\geqslant 1-|W_2 T|>0$$

进一步可以得到

$$\left|\frac{W_1 S}{1+\Delta W_2 T}\right|\leqslant\left|\frac{W_1 S}{1-|W_2 T|}\right|,\ \forall\omega$$

于是

$$\left\|\frac{W_1 S}{1+\Delta W_2 T}\right\|_\infty<1$$

因此该系统满足鲁棒跟踪性。

必要性证明。设在 ω^* 处

$$\frac{|W_1 S|}{1-|W_2 T|}$$

取得最大值，即

$$\frac{|W_1 S|}{1-|W_2 T|}=\sup_\omega\frac{|W_1(\mathrm{j}\omega)S(\mathrm{j}\omega)|}{1-|W_2(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega)|}$$

寻找 Δ，满足 $1-|W_2 T|=|1+\Delta W_2 T|$，即 $\Delta W_2 T<0$ (一个负实数)。则，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{W_1 S}{1-|W_2 T|}\right\|_\infty&=\left|\frac{W_1(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)}{1-|W_2(\mathrm{j}\omega^*)T(\mathrm{j}\omega^*)|}\right|\\&=\frac{|W_1(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)|}{|1+\Delta(\mathrm{j}\omega^*)W_2(\mathrm{j}\omega^*)T(\mathrm{j}\omega^*)|}\\&\leqslant\left\|\frac{W_1 S}{1+\Delta W_2 T}\right\|_\infty<1\end{aligned}$$

下面回到定理的证明。

充分条件证明。根据 (3) 可知。$\|\,|W_1 S|+|W_2 T|\,\|_\infty<1$ 等价于

$$\begin{cases}\|W_2 T\|_\infty<1\\\left\|W_1\dfrac{S}{1+\Delta_2 W_2 T}\right\|_\infty<1\end{cases}$$

于是 (1) 中的条件得到满足。对于摄动有界的 Δ_1，总可以找到一个合适的 W_1，使得 $\Delta_1 W_1 S > 0$，于是由 $\|W_2 T\|_\infty < 1$ 可得

$$\left\| W_2 \frac{T}{1+\Delta_1 W_1 S} \right\|_\infty < 1$$

于是 (1) 和 (2) 同时满足，系统鲁棒稳定。

必要条件证明。假设系统是鲁棒稳定的，于是 (1) 和 (2) 中的条件都成立。对于摄动有界的 Δ_2，总可以找到一个合适的权 W_2，使得 $\Delta_2 W_2 T > 0$，于是 $1+\Delta_2 W_2 T > 1$，另外，由 (1) 中的条件

$$\left\| W_1 \frac{S}{1+\Delta_2 W_2 T} \right\|_\infty < 1$$

可得

$$\|W_1 S\|_\infty < 1$$

因为系统鲁棒稳定，则条件 (1) 和 (2) 同时满足，因此可推出下面的不等式组同时成立：

$$\begin{cases} \|W_1 S\|_\infty < 1 \\ \left\| W_2 \dfrac{T}{1+\Delta_1 W_1 S_0} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

根据 (3) 中的结论，有

$$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1$$

□

最后，我们将其他一些常用不确定模型的鲁棒稳定性检验概括在表 3.1 中，表中的 T, S 均表示标称对象的补敏感函数和敏感函数。

表 3.1　常用不确定模型鲁棒稳定性的检验

摄动模型	条　件
$(1+\Delta W_2) P$	$\|W_2 T\|_\infty < 1$
$P+\Delta W_2$	$\|W_2 C S\|_\infty < 1$
$P/(1+\Delta W_2 P)$	$\|W_2 P S\|_\infty < 1$
$P/(1+\Delta W_2)$	$\|W_2 S\|_\infty < 1$

3.3　小增益定理

3.2 节分析了摄动系统的稳定性问题，其判据也可以通过下面介绍的小增益定理得到，并与前面定理的结果一致。

定理 3.5 (小增益定理)　考虑如图 3.11 所示的不确定系统，设 $M \in \mathrm{RH}_\infty$，且令 $\gamma > 0$，则对所有的 $\Delta(s) \in \mathrm{RH}_\infty$，闭环系统鲁棒稳定的条件为

(1) $\|\Delta\|_\infty \leqslant 1/\gamma$ 当且仅当 $\|M(s)\|_\infty < \gamma$；

(2) $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ 当且仅当 $\|M(s)\|_\infty \leqslant \gamma$。

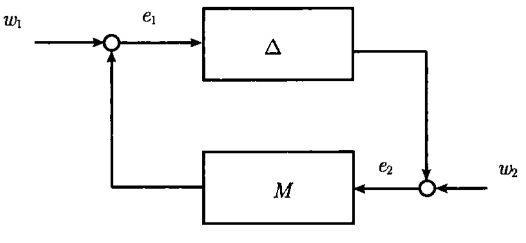


图 3.11 基本不确定系统

证明 由于定理中 (1) 和 (2) 的证明类似，下面只证明 (1)。不失一般性，假设 $\gamma = 1$。

充分性证明。由于 $M(s)$ 和 $\Delta(s)$ 均是稳定的，所以 $M(s)\Delta(s)$ 也是稳定的。由于 $\Delta(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ 且 $\|\Delta(s)\|_\infty \leqslant 1$，可以得到

$$\begin{aligned}\inf_{s\in\overline{\mathbb{C}}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) &\geqslant 1 - \sup_{s\in\overline{\mathbb{C}}_+} \overline{\sigma}(M(s)\Delta(s)) \\ &= 1 - \|M(s)\Delta(s)\|_\infty \\ &\geqslant 1 - \|M(s)\|_\infty \\ &> 0\end{aligned}$$

其中 $\overline{\sigma}(\cdot)$, $\underline{\sigma}(\cdot)$ 分别表示最大和最小奇异值。$\overline{\mathbb{C}}_+$ 表示闭右半平面。可知，下式

$$\inf_{s\in\overline{\mathbb{C}}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \neq 0$$

对所有 $\Delta(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ 且 $\|\Delta(s)\|_\infty \leqslant 1$ 均成立。即 $\det(I - M(s)\Delta(s))$ 对所有 $\Delta(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ 且 $\|\Delta(s)\|_\infty \leqslant 1$ 在闭右半平面没有零点。根据定理 2.2 可知，闭环系统稳定。

下面用反证法证明定理的必要性部分。假设 $M(s) \geqslant 1$，下面将证得：存在一个 $\Delta \in \mathrm{RH}_\infty$ 且 $\|\Delta \leqslant 1\|$，使得 $\det(I - M(s)\Delta(s))$ 在虚轴上有一个零点，因此系统不稳定。

设 $w_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$，使得 $\overline{\sigma}(M(\mathrm{j}w_0)) \geqslant 1$。令 $M(\mathrm{j}w_0) = U(\mathrm{j}w_0)\Sigma(\mathrm{j}w_0)V^*(\mathrm{j}w_0)$ 为一个奇异值分解，其中

$$\begin{aligned}U(\mathrm{j}w_0) &= [\,u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p\,] \\ V(\mathrm{j}w_0) &= [\,V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_q\,] \\ \Sigma(\mathrm{j}w_0) &= \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots\}\end{aligned}$$

结论：只需构造出一个 $\Delta \in \mathrm{RH}_\infty$ 使得 $\Delta(\mathrm{j}w_0) = \dfrac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^*$ 及 $\|\Delta\| \leqslant 1$ 即可。因为，对这样的 $\Delta(s)$ 有

$$
\begin{aligned}
\det(I - M(\mathrm{j}w_0)\Delta(\mathrm{j}w_0)) &= \det\left(I - U\Sigma V^* \frac{v_1 u_1^*}{\sigma_1}\right) \\
&= 1 - u_1^* U\Sigma V^* \frac{v_1}{\sigma_1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故闭环系统要么不是良定的 (若 $w_0 = \infty$)，要么不是稳定的 (若 $w \in \mathbb{R}$)。下面对这两种情况再分别进行讨论：

(1) $w_0 = 0$ 或 ∞：则 U 和 V 均为实矩阵。此时，可将 $\Delta(s)$ 取为

$$
\Delta = \frac{v_1 u_1^*}{\sigma_1} \in \mathbb{R}^{q\times p}
$$

(2) $0 < W_0 < \infty$：记 u_1 和 v_1 的形式分别为

$$
u_1^* = \begin{bmatrix} u_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} & u_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} & \cdots & u_{1p}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_p} \end{bmatrix}, \quad v_1^* = \begin{bmatrix} v_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1} \\ v_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2} \\ \vdots \\ v_{1q}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_q} \end{bmatrix}
$$

其中选择合适的 $u_{1i} \in \mathbb{R}$ 及 $v_{1j} \in \mathbb{R}$ 使得对所有 i, j 都满足 $\theta_i, \phi_j \in [-\pi,\ 0]$。选择 $\beta_i \geqslant 0$ 和 $\alpha - j \geqslant 0$ 使得

$$
\angle\left(\frac{\beta_i - \mathrm{j}w_0}{\beta_i + \mathrm{j}w_0}\right) = \theta_i, \quad \angle\left(\frac{\alpha_j - \mathrm{j}w_0}{\alpha_j + \mathrm{j}w_0}\right) = \phi_j
$$

对 $i = 1, 2, \cdots, p$ 及 $j = 1, 2, \cdots, q$ 均成立。令

$$
\Delta = \frac{1}{\sigma_1} \begin{bmatrix} v_{11}\dfrac{\alpha_1 - s}{\alpha_1 + s} \\ \vdots \\ v_{1q}\dfrac{\alpha_q - s}{\alpha_q + s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}\dfrac{\gamma_1 - s}{\gamma_1 + s} & \cdots & u_{1p}\dfrac{\gamma_p - s}{\gamma_p + s} \end{bmatrix} \in \mathrm{RH}_\infty
$$

则 $\|\Delta\|_\infty = \dfrac{1}{\sigma_1} \leqslant 1$ 及 $\|\Delta(\mathrm{j}w_0)\|_\infty = \dfrac{v_1 u_1^*}{\sigma_1} \leqslant 1$。 □

通过该定理同样可以得到不同摄动模型的鲁棒稳定条件，并与 3.2 节的结果一致。例如，将乘积摄动模型表示成如图 3.11 所示的形式，可知 $M = -W_2 T$。由于乘积摄动模型中有 $\|\Delta\| < 1$，根据小增益定理，闭环系统稳定的充分必要条件为 $\|W_2 T\|_\infty < 1$。

3.4 鲁棒性能 (鲁棒跟踪性)

接着研究不确定系统的性能。假定对象传递函数属于集合 $\mathscr{P}$。鲁棒性能的一般含义是指集合中的所有对象都满足内稳定和一种特定的性能。需要注意的是，鲁棒性能的前提是要求系统具有鲁棒稳定性。

定义 3.5 (鲁棒跟踪性) 设不确定对象属于集合 $\mathscr{P}$，对于给定的参考输入信号，当控制器在鲁棒镇定不确定系统的同时，使得该摄动集合中的每一个对象均具有跟踪性能，则称该系统具有鲁棒跟踪性。

例如，对于乘积摄动模型

$$\mathscr{P}=\left\{\tilde{P}(s)\left[1+\Delta(s)W_2(s)\right]P(s)\middle|\,\|\Delta\|_\infty\leqslant 1\right\}$$

对于给定的参考输入信号，当鲁棒镇定的控制器使得对于 $\forall\tilde{P}\in\mathscr{P}$，均有 $\left\|W_1\tilde{S}\right\|_\infty<1$，则称系统是鲁棒跟踪的，其中

$$\tilde{S}=\frac{1}{1+\tilde{P}C}$$

为摄动系统的敏感函数。

C 为鲁棒稳定控制器的条件为 $\|W_2T\|_\infty<1$，其中 $T=\dfrac{PC}{1+PC}$ 为标称系统的补敏感函数。对于摄动系统，C 为鲁棒跟踪控制器的条件为 $\left\|W_1\tilde{S}\right\|_\infty<1$，其中

$$\begin{aligned}\tilde{S}&=\frac{1}{1+\tilde{P}C}\\&=\frac{1}{1+(1+\Delta W_2)L}\\&=\frac{1}{(1+L)(1+\Delta W_2T)}\\&=\frac{S}{1+\Delta W_2T}\end{aligned}$$

则鲁棒跟踪性的条件归结为：

(1) $\|W_2T\|_\infty<1$(鲁棒稳定性)；

(2) $\left\|\dfrac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right\|_\infty<1,\ \ \forall\Delta:\|\Delta\|_\infty\leqslant 1$ (跟踪性)。

下面针对几种摄动模型，给出其鲁棒跟踪性的检验方法。

定理 3.6 设对象不确定性满足乘积摄动模型，即

$$\wp=\left\{\tilde{P}=(1+\Delta W_2)P\,|\|\Delta\|_\infty\leqslant 1\right\}$$

则系统具有鲁棒跟踪性的充分必要条件为

$$\||W_1S|+|W_2T|\|_\infty<1$$

证明 充分性证明。已知 $\||W_1S|+|W_2T|\|_\infty<1$，该式等价于

$$|W_1S|<1,\ \ |W_2T|<1\ 且\ |W_1S|+|W_2T|<1,\quad\forall\omega$$

于是可得

$$\|W_2T\|_\infty < 1$$

即系统是鲁棒稳定的。从 $|W_1S| + |W_2T| < 1$ 中可以推出

$$\begin{aligned}&|W_1S| < 1 - |W_2T| = |1 - |W_2T||\\ \Rightarrow &\left|\frac{|W_1S|}{|1-|W_2T||}\right| < 1, \quad \forall\omega\\ \Rightarrow &\left\|\frac{|W_1S|}{|1-|W_2T||}\right\|_\infty < 1\end{aligned}$$

对所有的 Δ，有

$$\begin{aligned}1 &= |1 + \Delta W_2T - \Delta W_2T|\\ &\leqslant |1 + \Delta W_2T| + |\Delta W_2T|\\ &\leqslant |1 + \Delta W_2T| + |W_2T|\end{aligned}$$

于是有

$$|1 + \Delta W_2T| \geqslant 1 - |W_2T| > 0$$

进一步可以得到

$$\left|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right| \leqslant \left|\frac{W_1S}{1-|W_2T|}\right|, \quad \forall\omega$$

于是

$$\left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right\|_\infty < 1$$

因此该系统满足鲁棒跟踪性。

必要性证明。设系统满足鲁棒跟踪性，即

$$\|W_2T\|_\infty < 1, \quad \left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right\|_\infty < 1, \quad \forall\Delta:\ \|\Delta\|_\infty < 1$$

则 $|W_2T| < 1, \forall\omega$。设在 ω^* 处有

$$\frac{|W_1S|}{1-|W_2T|}$$

取得最大，即

$$\frac{|W_1S|}{1-|W_2T|} = \sup_\omega \frac{|W_1(\mathrm{j}\omega)S(\mathrm{j}\omega)|}{1-|W_2(\mathrm{j}\omega)T(\mathrm{j}\omega)|}$$

寻找 Δ，满足 $1 - |W_2T| = |1 + \Delta W_2T|$，即 $\Delta W_2T < 0$ (一个负实数)。则

$$\begin{aligned}\left\|\frac{W_1S}{1-|W_2T|}\right\|_\infty &= \left|\frac{W_1(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)}{1-|W_2(\mathrm{j}\omega^*)T(\mathrm{j}\omega^*)|}\right| \\ &= \frac{|W_1(\mathrm{j}\omega^*)S(\mathrm{j}\omega^*)|}{|1+\Delta(\mathrm{j}\omega^*)W_2(\mathrm{j}\omega^*)T(\mathrm{j}\omega^*)|} \\ &\leqslant \left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right\|_\infty < 1\end{aligned}$$

则有

$$\frac{|W_1S|}{1-|W_2T|} < 1, \quad \forall\omega$$

即

$$|W_1S| + |W_2T| < 1, \quad \forall\omega$$

进一步可得到

$$\||W_1S| + |W_2T|\|_\infty < 1$$

□

定理 3.7 考虑加性摄动不确定模型

$$\tilde{P} = P + \Delta W_2$$

标称性能条件为 $\|W_1S\|_\infty < 1$，鲁棒性能的充分必要条件是

$$\||W_1S| + |W_2CS|\|_\infty < 1$$

证明 对于标称对象内稳定的加性不确定模型，其标称性能条件为 $\|W_1S\|_\infty < 1$，鲁棒稳定条件是 $\|W_2CS\|_\infty < 1$。当 P 摄动到 $\tilde{P}$，S 将摄动到 $\tilde{S}$，即

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{1}{1+\tilde{P}C} \\ &= \frac{1}{1+(P+\Delta W_2)C} \\ &= \frac{S}{1+\Delta W_2CS}\end{aligned}$$

因此，鲁棒性能条件等价为

$$\begin{cases}\|W_2CS\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_1S}{1+\Delta W_2CS}\right\|_\infty < 1\end{cases}$$

由引理 3.1 可知，$\||W_1S| + |W_2CS|\|_\infty < 1$ 可等价于

$$\begin{cases}\|W_2CS\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right\|_\infty < 1\end{cases}$$

于是问题转化为证明：不等式组

$$\begin{cases} \|W_2CS\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_1S}{1+\Delta W_2CS}\right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

与下面的条件等价：

$$\begin{cases} \|W_2CS\|_\infty < 1 \\ \left\|\dfrac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

充分性证明。注意到

$$\begin{aligned} 1 &= |1+\Delta W_2CS - \Delta W_2CS| \\ &\leqslant |1+\Delta W_2CS| + |\Delta W_2CS| \\ &\leqslant |1+\Delta W_2CS| + |W_2CS| \end{aligned}$$

因此有

$$0 < 1 - |W_2CS| \leqslant |1+\Delta W_2CS|$$

所以

$$\left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2CS}\right\|_\infty \leqslant \left\|\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right\|_\infty < 1$$

必要性证明。设在频率 ω^* 处

$$\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}$$

取得极大值，即

$$\left\|\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right\|_\infty = \left.\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right|_{\omega=\omega^*}$$

选择 Δ 使得

$$1-|W_2CS| = |1+\Delta W_2CS|$$

需要注意的是，这样的 Δ 是肯定存在的，即

$$\Delta = -\left.\frac{|W_2CS|}{W_2CS}\right|_{\omega=\omega^*}$$

其几何意义为将向量 W_2CS 的幅值归一化，幅角变为自身的补角，如图 3.12 所示。因此

$$\begin{aligned}\left\|\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right\|_\infty &= \left.\frac{W_1S}{1-|W_2CS|}\right|_{\omega=\omega^*}\\ &= \left.\frac{W_1S}{|1+\Delta W_2CS|}\right|_{\omega=\omega^*}\\ &\leqslant \left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2CS}\right\|_\infty\\ &< 1\end{aligned}$$

□

定理 3.8　考虑除性摄动不确定模型

$$\tilde{P}=\frac{P}{1+\Delta W_2}$$

其标称性能条件为 $\|W_1T\|_\infty<1$，则鲁棒性能的充分必要条件是

$$\||W_1T|+|W_2S|\|_\infty<1$$

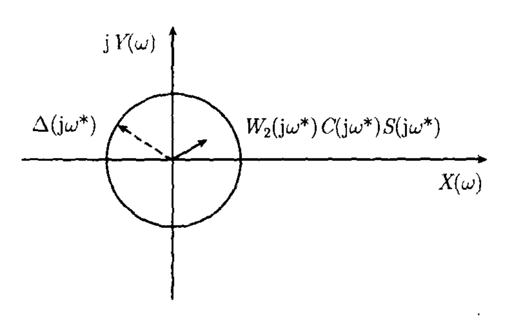


图 3.12　构造 Δ 示意图

证明　对于标称对象内稳定的除性不确定模型，已知标称性能条件为 $\|W_1T\|_\infty<1$，鲁棒稳定的条件是 $\|W_2S\|_\infty<1$。当 P 摄动到 $\tilde{P}$，T 将摄动到 $\tilde{T}$

$$\begin{aligned}\tilde{T}&=\frac{\tilde{P}C}{1+\tilde{P}C}\\ &=\frac{PC}{1+PC+\Delta W_2}\\ &=\frac{T}{1+\Delta W_2S}\end{aligned}$$

因此，鲁棒性能的条件等价于

$$\begin{cases}\|W_2S\|_\infty<1\\ \left\|\dfrac{W_1T}{1+\Delta W_2S}\right\|_\infty<1\end{cases}$$

由引理 3.1 可知

$$\| |W_1T| + |W_2S| \|_\infty < 1$$

可以等价于

$$\begin{cases} \|W_2S\|_\infty < 1 \\ \left\| \dfrac{W_1T}{1-|W_2S|} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

于是问题转化为证明

$$\begin{cases} \|W_2S\|_\infty < 1 \\ \left\| \dfrac{W_1T}{1+\Delta W_2S} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} \|W_2S\|_\infty < 1 \\ \left\| \dfrac{W_1T}{1-|W_2S|} \right\|_\infty < 1 \end{cases}$$

充分性证明。因为

$$\begin{aligned} 1 &= |1+\Delta W_2S - \Delta W_2S| \\ &\leqslant |1+\Delta W_2S| + |\Delta W_2S| \\ &\leqslant |1+\Delta W_2S| + |W_2S| \end{aligned}$$

于是得到

$$0 < 1 - |W_2S| \leqslant |1+\Delta W_2S|$$

所以

$$\left\| \frac{W_1T}{1+\Delta W_2S} \right\|_\infty \leqslant \left\| \frac{W_1T}{1-|W_2S|} \right\|_\infty < 1$$

必要性证明。设在频率 ω^* 处

$$\frac{W_1T}{1-|W_2S|}$$

取得极大值，即

$$\left\| \frac{W_1T}{1-|W_2S|} \right\|_\infty = \left. \frac{W_1T}{1-|W_2S|} \right|_{\omega=\omega^*}$$

选择 Δ 使得下面等式成立：

$$1 - |W_2S| = |1+\Delta W_2S|$$

这样的 Δ 是必然存在的

$$\Delta = -\left.\frac{|W_2S|}{W_2S}\right|_{\omega=\omega^*}$$

其几何意义为将向量 W_2S 幅值归一化，幅角变为自身的补角，如图 3.13 所示。因此

$$\begin{aligned}\left\|\frac{W_1T}{1-|W_2S|}\right\|_\infty &= \left.\frac{W_1T}{1-|W_2S|}\right|_{\omega=\omega^*} \\ &= \left.\frac{W_1T}{|1+\Delta W_2S|}\right|_{\omega=\omega^*} \\ &\leqslant \left\|\frac{W_1T}{1+\Delta W_2S}\right\|_\infty < 1\end{aligned}$$

□

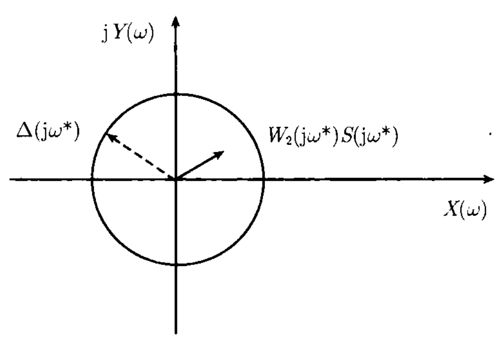


图 3.13　构造 Δ 示意图

以上几个定理中给出了已知不确定摄动模型和标称性能条件的情况下，摄动系统鲁棒性能的检验条件。表 3.2 给出了 4 种不确定模型和两种标称性能条件下，不确定系统鲁棒性能的检验。

表 3.2　常用不确定模型鲁棒性能的检验

摄动	标称性能条件	
	$\|W_1S\|_\infty < 1$	$\|W_1T\|_\infty < 1$
$(1+\Delta W_2)P$	$\||W_1S|+|W_2T|\|_\infty < 1$	复杂
$P+\Delta W_2$	$\||W_1S|+|W_2CS|\|_\infty < 1$	复杂
$P/(1+\Delta W_2P)$	复杂	$\||W_1T|+|W_2PS|\|_\infty < 1$
$P/(1+\Delta W_2)$	复杂	$\||W_1T|+|W_2S|\|_\infty < 1$

3.5　注　　记

本章内容由文献 [1] 的第 4 章、文献 [2] 的第 9 章和文献 [3] 的第 3 章内容整理而成。

3.6 习　　题

1. 考虑一个单位反馈系统 ($F = 1$)，如果一个控制器能同时使得两个对象内稳定，这两个对象在 $\mathrm{Re}S \geqslant 0$ 有相同数量的极点吗？为什么？

2. 考察一个单位反馈系统，其中

$$P(s) = \frac{k}{s}$$

是否存在一个控制器 $C(s)$ 使得 $k = 1$ 和 $k = 2$ 两种情况下系统均能内稳定？

3. 考察一个单位反馈系统，其中

$$P(s) = \frac{1}{s+a}, \quad C(s) = 10$$

其中 a 是一个实数，试求出保证系统内稳定的 a 范围。

4. 证明定理 3.3 中的结论。

参 考 文 献

[1] Doyle J C, 弗朗西斯 B A, 坦嫩鲍姆 A R. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京：清华大学出版社, 1993.
[2] 周克敏, Doyle J C, Glover K. 鲁棒与最优控制. 毛剑琴, 钟宜生, 林岩等译. 北京：国防工业出版社, 2006.
[3] 嵇小辅. 不确定线性系统鲁棒控制若干问题研究. 杭州：浙江大学博士学位论文, 2006.

第 4 章　控制参数化与镇定设计

本章研究系统的综合问题。考虑如图 4.1 所示的单位反馈系统，其中 P 严格正则，C 正则，则标称系统是强适定的。给定对象 P，系统的综合问题一般为设计 C，使得反馈系统达到：

(1) 内稳定；

(2) 具有某些希望的附加特性，如跟踪性能。

系统综合的一般方法是把所有满足 (1) 的控制器 C 参数化，然后考察是否存在一个参数使 (2) 成立。本章主要研究求出这样控制器的方法。

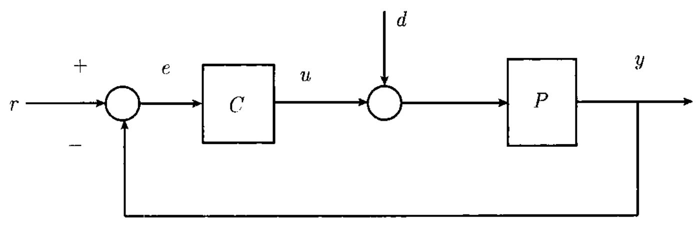


图 4.1　单位反馈系统

4.1　控制器参数化：稳定对象

本节研究标称对象的综合问题，即对象是没有不确定性的传递函数。并假定对象 P 是稳定的，要参数化所有控制器 C 使得反馈系统内稳定。令 ζ 为所有稳定、正则、实有理传递函数的集合，如果 $F, G \in \zeta$，则有下面的性质：

(1) $F + G \in \zeta$；

(2) $F \cdot G \in \zeta$；

(3) $1 \in \zeta$。

定理 4.1　假定 $P \in \zeta$，那么使反馈系统内稳定的所有控制器 C 的集合为

$$\left\{\frac{Q}{1 - PQ} : Q \in \zeta\right\}$$

证明　必要性证明。假定 C 使系统达到内稳定，令 Q 表示从 r 到 u 的传递函数，即

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{1 + PC}$$

那么 $Q \in \zeta$，并且有

$$C = \frac{Q}{1 - PQ}$$

充分性证明。假定 $Q \in \zeta$，定义

$$C \overset{\text{def}}{=} \frac{Q}{1 - PQ} \tag{4.1}$$

根据前面内容可知，反馈系统是内稳定的，当且仅当 9 个传递函数

$$\frac{1}{1+PC}\begin{bmatrix} 1 & -P & -1 \\ C & 1 & -C \\ PC & P & 1 \end{bmatrix}$$

都是稳定的和正则的。将式 (4.1) 代入上式，并简化分式，得

$$\begin{bmatrix} 1 - PQ & -P(1 - PQ) & -(1 - PQ) \\ Q & 1 - PQ & -Q \\ PQ & P(1 - PQ) & 1 - PQ \end{bmatrix}$$

注意到这 9 个传递函数都是自由参数 Q 的仿射函数，即每一个传递函数都具有 $T_1 + T_2Q$ 的形式，这里的 T_1, T_2 均属于 ζ。显然这 9 项都属于 ζ。 □

下面来看看定理 4.1 的应用。假定要找一个 C，使得反馈系统内稳定，且 y 渐近跟踪阶跃输入 $r\,(d = 0)$。注意到该系统的敏感函数为

$$S = \frac{1}{PC} = 1 - PQ$$

按定理 4.1 参数化 C，那么 y 渐近跟踪阶跃信号的充分必要条件是从 r 到 e (即 S) 的传递函数有一个零点在 $s = 0$，即

$$P(0)Q(0) = 1$$

这个方程有解 $Q \in \zeta$，当且仅当 $P(0) \neq 0$。当这个条件满足时，所有解的集合是

$$\left\{ C = \frac{Q}{1 - PQ} : Q \in \zeta, Q(0) = \frac{1}{P(0)} \right\}$$

我们注意到，在 $s = 0$ 的情况下，Q 等于 P 的逆。而且可以检验，这样的控制器有一个极点在 $s = 0$ (参看第 3 章)。

例 4.1 已知一个对象为

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

寻找一个使系统达内稳定的控制器 C，使输出信号 y 渐近跟踪斜坡信号 r。

按定理 4.1 参数化 C，从 r 到 e 的传递函数 S 必须有 (至少) 2 个零点在 $s=0$，又知 r 有 2 个极点在此处。取

$$Q(s)=\frac{as+b}{s+1}$$

它属于 ζ，且有两个变量 a 和 b 可用来配置 S 的两个零点，于是有

$$\begin{aligned} S(s) &= 1-\frac{as+b}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{s^3+4s^2+(5-a)s+(2-b)}{(s+1)^2(s+2)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

所以应当取 $a=5$，$b=2$。这就得到

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{5s+2}{s+1} \\ C(s) &= \frac{(5s+2)(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

该控制器是可镇定的，且传递函数 S 有 2 个零点在 $s=0$，即反馈系统满足跟踪性能。

4.2 互 质 分 解

本节将介绍传递函数的互质分解，主要为下一节做准备。

定义 4.1 设 $N,M\in\zeta$，若存在 $X,Y\in\zeta$，满足以下方程:

$$XN+YM=1 \tag{4.4}$$

则称 N，M 互质。

性质 4.1 N，M 是互质的，当且仅当 M 在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $s=\infty$ 没有共同的零点。

这个性质的证明是显然的，若存在 $s=s_0$ 满足 $N(s_0)=M(s_0)=0$，则

$$X(s_0)N(s_0)+Y(s_0)M(s_0)=0\neq 1,\quad \forall X,Y\in\zeta$$

进一步也可以证明性质中的条件是充分条件。

定义 4.2 设 G 为实有理传递函数，若存在 $N,M\in\zeta$，使

$$G(s)=\frac{N(s)}{M(s)}$$

且 N，M 互质，则称 N，M 为 G 在 ζ 中的一个互质分解。

对于给定的实有理传递函数 $G(s)$，本节的目的在于求出 ζ 中的 4 个函数 $N(s), X(s), M(s), Y(s)$，使得下面两个方程得到满足：

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1$$

通常由给定的 $G(s)$ 构造 $N(s)$ 和 $M(s)$ 是比较方便的，具体见下例。

例 4.2 给定一实有理传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

求其互质分解。

将分子分母同除以一个在 $\text{Re}(s) \geqslant 0$ 无极点的多项式，如 $(s+1)^k$，一般地，k 为 G 分子分母的最大阶次。这里 $k=1$，即

$$N(s) = \frac{1}{s+1}, \quad M(s) = \frac{s}{s+1}$$

值得注意的是，如果取 $k>1$，那么 $N(s)$ 和 $M(s)$ 就不是互质的。例如，我们可以取 $k=2$，此时有

$$N(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad M(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

显然，$N(s)$ 和 $M(s)$ 在 $s=\infty$ 有共同的零点，因此它们不是互质的。

Euclid 算法 由互质的 $N, M \in \zeta$，求 $X, Y \in \zeta$ 满足 $XN + YM = 1$ 是比较困难的。可以用下面介绍的 Euclid 算法来解决这个问题。给定多项式 $n(\lambda), m(\lambda)$，满足 $\deg(n) \geqslant \deg(m)$。如果 $n(\lambda)$ 的阶次比 $m(\lambda)$ 的阶次小，则交换 $n(\lambda)$ 和 $m(\lambda)$。下面给出 Euclid 算法来求出 $x(\lambda), y(\lambda)$，满足 $x(\lambda)n(\lambda) + y(\lambda)m(\lambda) = 1$。

(1) 第一步：用 n 除以 m，得商和余式分别为 q_1, r_1，

$$n = mq_1 + r_1$$

此时有：r_1 阶次小于 m 的阶次。

(2) 第二步：用 m 除以 r_1，得商和余式分别为 q_2, r_2，

$$m = r_1 q_2 + r_2$$

此时有：r_2 阶次小于 r_1 的阶次。

(3) 第三步：用 r_1 除以 r_2，得商和余式分别为 q_3, r_3，

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

此时有：r_3 阶次小于 r_2 的阶次。

继续计算，直到第 k 步时得到的余数 r_k 为一常数则停止。具体计算过程总结在

表 4.1 中。终止判据：当 $r_n(\lambda)$ 为一个常数 (与 λ 无关) 时，则停止计算。若 $r_n=0$，则 $n(\lambda), m(\lambda)$ 不是互质的；若 $r_n\neq 0$，则 $n(\lambda), m(\lambda)$ 是互质的，此时由 $r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n$ 可解出

$$r_n=a(q_1,q_2,\cdots,q_n)\cdot n+b(q_1,q_2,\cdots,q_n)\cdot m$$

其中 $a(\cdot), b(\cdot)$ 是 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 的多项式。令

$$x(\lambda)=\frac{1}{r_n}a(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$
$$y(\lambda)=\frac{1}{r_n}b(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

有

$$x(\lambda)n(\lambda)+y(\lambda)m(\lambda)=1$$

于是得到所需的 $x(\lambda)$ 和 $x(\lambda)$。下面通过一个例子来介绍 Euclid 算法。

表 4.1 Euclid 算法

步骤	被除数	除数	商	余	备注
1	$n(\lambda)$	$m(\lambda)$	$q_1(\lambda)$	$r_1(\lambda)$	$n=mq_1+r_1$
2	$m(\lambda)$	$r_1(\lambda)$	$q_2(\lambda)$	$r_2(\lambda)$	$m=r_1q_2+r_2$
3	$r_1(\lambda)$	$r_2(\lambda)$	$q_3(\lambda)$	$r_3(\lambda)$	$r_1=r_2q_3+r_3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$r_{n-2}(\lambda)$	$r_{n-1}(\lambda)$	$q_n(\lambda)$	$r_n(\lambda)$	$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n$

例 4.3 $n(\lambda)=\lambda^2, m(\lambda)=-2\lambda^2-\lambda+1$，用 Euclid 算法求出多项式 $x(\lambda), y(\lambda)$ 使之满足 $xn+ym=1$。用 $n(\lambda)$ 除以 $m(\lambda)$，得商和余数分别为

$$q_1(\lambda)=-\frac{1}{2}$$
$$r_1(\lambda)=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}$$

再利用 $m(\lambda)$ 除以 $r_1(\lambda)$，得商和余数为别为

$$q_2(\lambda)=4\lambda+6$$
$$r_2(\lambda)=-2$$

由于 r_2 是一非零常数，故 $n(\lambda), m(\lambda)$ 互质，且有

$$n=mq_1+r_1$$
$$m=r_1q_2+r_2$$

得

$$r_2=(1+q_1q_2)m-q_2n$$

注意到

$$-\frac{q_2}{r_2}n+\frac{(1+q_1q_2)}{r_2}m=1$$

因此取

$$x=-\frac{q_2}{r_2}=2\lambda+3$$

$$y=\frac{(1+q_1q_2)}{r_2}=\lambda+1$$

下面给出将一实有理传递函数 G 进行互质分解的步骤。主要思路在于做作变量代换 $s\leftrightarrow\lambda$

$$s=\frac{1-\lambda}{\lambda},\quad \lambda=\frac{1}{s+1}$$

使得 λ 的多项式变成 ζ 中的函数。对 G 进行互质分解的步骤如下：

(1) 如果 G 是稳定的，取 $N=G$，$M=1$，$X=0$，$Y=1$，停止否则继续。

(2) 利用映射 $s=(1-\lambda)/\lambda$ 将 $G(s)$ 变换成 $\tilde{G}(\lambda)$，将 $\tilde{G}(\lambda)$ 写成互质多项式的比

$$\tilde{G}(\lambda)=\frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

(3) 利用 Euclid 算法，求得多项式 $x(\lambda),y(\lambda)$ 使得 $nx+my=1$。

(4) 利用映射

$$\lambda=\frac{1}{s+1}$$

将 $n(\lambda),m(\lambda),x(\lambda),y(\lambda)$ 变换成 $N(s),M(s),X(s),Y(s)$，此步骤中所用的映射并不唯一，但必须保证 $n(\lambda),m(\lambda),x(\lambda),y(\lambda)$ 映射到 N,M,X,Y 后，它们属于 ζ。

例 4.4　设一有理传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

对其做互质分解。利用映射 $s=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$ 将 $G(s)$ 变换成 $\tilde{G}(\lambda)$，得

$$\tilde{G}(\lambda)=\frac{\lambda^2}{-2\lambda^2-\lambda+1}$$

即 $n=\lambda^2,m=-2\lambda^2-\lambda+1$，根据例 4.3 可得

$$x=2\lambda+3$$

$$y=\lambda+1$$

再利用映射 $\lambda = \dfrac{1}{s+1}$ 得

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{1}{(s+1)^2}\\ M(s) &= \frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)^2}\\ X(s) &= \frac{3s+5}{s+1}\\ Y(s) &= \frac{s+2}{s+1}\end{aligned}$$

4.3 控制器参数化：一般对象

前面讨论了稳定对象的控制器设计，为了研究更一般的情形，下面不再假设控制对象 P 是稳定的。

定理 4.2 设 P 和 C 分别为控制对象和控制器，$P(s) = \dfrac{N(s)}{M(s)}$ 为 P 在 ζ 中的一个互质分解。$X, Y \in \zeta$，满足 $XN + YM = 1$，则使闭环系统内稳定的所有 C 的集合为

$$\ell = \left\{ C = \frac{X+MQ}{Y-NQ} \middle| Q \in \zeta \right\}$$

其中 Q 为控制器参数。

为证明定理 4.2，先给出以下引理。

引理 4.1 设 P 和 C 分别为控制对象和控制器，令

$$C = \frac{N_c}{M_c}, \quad P = \frac{N}{M}$$

分别是 ζ 中的互质分解，则闭环系统内稳定的充分必要条件为

$$(NN_c + MM_c)^{-1} \in \zeta$$

证明 系统内稳定的充要条件为下面的 9 个传递函数都是稳定的

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+PC} \begin{bmatrix} 1 & -P & -1 \\ C & 1 & -C \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ u \end{bmatrix}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+PC} &= \frac{1}{1+\dfrac{NN_c}{MM_c}}\\ &= MM_c(NN_c + MM_c)^{-1}\end{aligned}$$

而 $MM_c \in \zeta$，则系统稳定性取决于 $(NN_c + MM_c)^{-1}$ 的稳定性。 □

下面回到定理 4.2 的证明

证明　充分性证明。已知 $Q \in \zeta$ 且 $C = \dfrac{X + MQ}{Y - NQ}$，令

$$N_c = X + MQ, \quad M_c = Y - NQ$$

首先证明 $C = \dfrac{N_c}{M_c}$ 是 ζ 中的互质分解。

$$N_cN + M_cM = XN + YM = 1$$

因此 $C = \dfrac{N_c}{M_c}$ 是 ζ 中的互质分解。由于 $N_c, M_c, N, M \in \zeta$，所以 $C = \dfrac{N_c}{M_c}$ 是 ζ 中的一个互质分解。同时注意到

$$(N_cN + M_cM)^{-1} = 1 \in \zeta$$

根据引理 4.1，闭环系统内稳定。

必要性证明。已知系统内稳定，设 C 为任一使得闭环系统内稳定控制器。令 $C = \dfrac{N_c}{M_c}$ 为 ζ 中的一个互质分解，定义

$$v = \frac{1}{NN_c + MM_c}$$

由引理 4.1 可知，$v \in \zeta$，且

$$NN_cv + MM_cv = 1$$

构造一个 Q，满足 $M_cv = Y - NQ$，代入上式得 $NN_cv + M(Y - NQ) = 1$。又因为

$$\begin{aligned} NX + MY &= NX + MY - MNQ + MNQ \\ &= N(X + MQ) + M(Y - NQ) \\ &= 1 \end{aligned}$$

比较两式，可得 $NN_cv = N(X + MQ)$，即 $N_cv = X + MQ$，则有

$$C = \frac{N_c}{M_c} = \frac{N_cv}{M_cv} = \frac{X + MQ}{Y - NQ}$$

最后需证明 $Q \in \zeta$。由 $M_cv = Y - NQ$，有

$$XM_cv = XY - XNQ$$

由 $N_cv = X + MQ$，有

$$YN_cv = XY + YMQ$$

两式相减得

$$(YN_c - XM_c)v = (YM + XN)Q = Q$$

因此有

$$Q = (YN_c - XM_c)v \in \zeta \qquad \square$$

推论 4.1 设 $P \in \zeta$，则使闭环系统内稳定的所有控制器 C 的集合为

$$\ell = \left\{ C = \frac{Q}{1 - PQ} | Q \in \zeta \right\}$$

证明 由于 $P \in \zeta$，根据互质分解算法，可令 $N = P, M = 1, X = 0, Y = 1$，代入定理 4.2，可得

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad Q \in \zeta \qquad \square$$

标注 4.1 当 $X + MQ, Y - NQ \in \zeta$ 为 ζ 中的一个互质分解，因为 $\exists N, M \in \zeta, (X + MQ) + M(Y - NQ) = 1$。

标注 4.2 当 $C = \dfrac{X + MQ}{Y - NQ}$，系统的敏感函数和补敏感函数分别为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1 + PC} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{N}{M} \cdot \dfrac{X + MQ}{Y - NQ}} \\
&= \frac{M(Y - NQ)}{MY + NX} \\
&= M(Y - NQ) \\
T &= 1 - S \\
&= 1 - MY + MNQ \\
&= NX + MNQ \\
&= N(X + MQ)
\end{aligned}$$

标注 4.3 已知 $N, M \in \zeta$，可由引理 4.1 得到求出 $X, Y \in \zeta$ 满足 $XN + YM = 1$ 的另一种方法。

(1) 对于给定的 $P = \dfrac{N}{M}$，寻找控制器 C 使闭环系统内稳定;

(2) 令 $C = \dfrac{N_c}{M_c}$ 为 ζ 中的一个互质分解，定义

$$v = NN_c + MM_c$$

根据引理 4.1 有 $v^{-1} \in \zeta$，且 $NN_c v^{-1} + MM_c v^{-1} = 1$。可设 $X = N_c v^{-1}, Y = M_c v^{-1}$，则 $X, Y \in \zeta$ 且 $NX + MY = 1$。可知有一个特定的 C，得到参数化的所有控制器

$$\left\{ C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} \middle| Q \in \zeta \right\}$$

使闭环系统内稳定。

4.4 强 镇 定

在工程中，我们总希望使用本身就是稳定的控制器来镇定控制对象，特别当对象本身是稳定的。这是因为反馈回路出现故障时，如系统敏感元件或执行机构出现故障，或者在启动或停机时，此时反馈回路就成了开路。如果对象和控制器各自都是稳定的，那么整体的稳定性就能维持。这就是本节将要研究的强镇定问题。

定义 4.3 (强镇定)　对于给定的对象 P，若存在稳定的控制器 C 使闭环系统内稳定，则称 P 是可强镇定的，C 为强镇定控制器。

定理 4.3　P 是可强镇定的当且仅当在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$，$P$ 的每一对相邻的实零点之间有偶数个实极点。

证明　必要性证明。令 $P = \dfrac{N}{M}$ 为 ζ 中的一个互质分解，即 $N, M \in \zeta$，且

$$\exists X, Y \in \zeta, \quad NX + MY = 1$$

对于 $Q \in \zeta$，已知 $\exists C = \dfrac{X + MQ}{Y - NQ}$ 使闭环系统内稳定。为了证明其必要性，我们采用反证法。假设在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$，$P$ 的某一对相邻的实零点之间有奇数个实极点，如设 $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3$ 满足

$$N(s_1) = N(s_3) = 0, \quad M(s_2) = 0$$

即 s_1, s_3 为 P 在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ 的两个相邻的实零点，而 s_2 为 P 在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ 的实极点，则必然有

$$M(s_1) M(s_3) < 0$$

即 $M(s_1)$ 和 $M(s_3)$ 的符号相反 (注：若 $M(s_1) M(s_3) > 0$，则 s_2 必为 $M(s)$ 的一个偶数阶零点)。由于

$$N(s_1) X(s_1) + M(s_1) Y(s_1) = M(s_1) Y(s_1) = 1$$

$$N(s_3) X(s_3) + M(s_3) Y(s_3) = M(s_3) Y(s_3) = 1$$

所以，$Y(s_1) = \dfrac{1}{M(s_1)}$ 与 $M(s_1)$ 符号相同，$Y(s_3) = \dfrac{1}{M(s_3)}$ 与 $M(s_3)$ 符号相同。则有

$$Y(s_1) - N(s_1)Q(s_1) = Y(s_1)$$
$$Y(s_3) - N(s_3)Q(s_3) = Y(s_3)$$

符号相反。则 $Y(s) - N(s)Q(s)$ 必有零点在 s_1, s_3 之间，即

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}$$

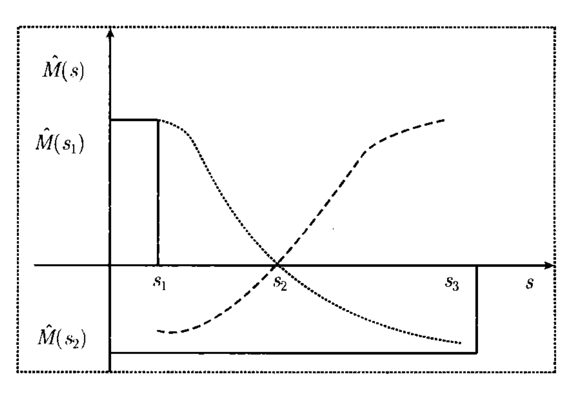


图 4.2 定理 4.3

一定有极点在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$，因此 C 必不稳定，于是 P 是不可强镇定的。这与假设矛盾。所以在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$，$P$ 的每一对相邻的实零点之间不可能为奇数个极点，只可能有偶数个实极点。

充分性证明。为简化起见，设 P 在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ 的极点和零点 (包括 $s = \infty$ 的零点) 均为实的，且不相同的。当然，如果没有这个假设，定理仍然成立。设 $P(s) = \dfrac{N(s)}{M(s)}$ 为 ζ 中的一个互质分解。令 $0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m = \infty$ 为 $P(s)$ 的 m 个在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ 的实零点，即

$$N(\sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

根据必要性证明中的推导，仅当 r_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ 具有相同的符号时，C 才可能是稳定的。由于

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in \zeta$$

若令 $U(s) \stackrel{\text{def}}{=} Y(s) - N(s)Q(s)$, $Q \in \zeta$，则 C 稳定 (P 可强镇定) 当且仅当存在一个 $Q \in \zeta$, $U^{-1} \in \zeta$。另外，在 $P(s)$ 的实零点处，

$$N(\sigma_i)X(\sigma_i) + M(\sigma_i)Y(\sigma_i) = M(\sigma_i)Y(\sigma_i) = 1$$

则

$$Y(\sigma_i) = \frac{1}{M(\sigma_i)} \stackrel{\text{def}}{=} r_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

因此，为了得到一个使系统内稳定的，且本身也是稳定的控制器 C，就等效为寻找一个 $U(s)$ 使得

(1) $U \in \zeta, U^{-1} \in \zeta$;

(2) $U(\sigma_i) = Y(\sigma_i) - N(\sigma_i) Q(\sigma_i) = Y(\sigma_i) = r_i,\ i = 1, \cdots, m$。

为寻找满足条件 (1) 和 (2) 中的 $U(s)$，先令

$$U_1(s) = r_1$$

于是有

$$U_1 \in \zeta, \quad U_1^{-1} \in \zeta$$

且 $U_1(\sigma_1) = r_1$。令

$$U_2(s) = (1 + a_1 F_1(s))^{l_1} U_1(s)$$

其中 $a_1 \in \mathbb{R}$ 为一常数，l_1 整数，$F_1(s) \in \zeta$，则 $U_2(s) \in \zeta$，为满足 $U_2^{-1} \in \zeta$ 以及

$$U_2(\sigma_1) = r_1, \quad U_2(\sigma_2) = r_2$$

有

$$U_2(\sigma_1) = (1 + a_1 F_1(\sigma_1))^{l_1} U_1(\sigma_1) = (1 + a_1 F_1(\sigma_1))^{l_1} r_1 = r_1$$

$$\Rightarrow F_1(\sigma_1) = 0$$

$$U_2(\sigma_2) = (1 + a_1 F_1(\sigma_2))^{l_1} U_1(\sigma_2) = (1 + a_1 F_1(\sigma_2))^{l_1} r_1 = r_2$$

$$\Rightarrow a_1 = \left(\sqrt[l_1]{\frac{r_2}{r_1}} - 1 \right) \Big/ F_1(\sigma_2)$$

为了得到 $U_2^{-1} \in \zeta$，需要用到小增益定理。$U_2^{-1} \in \zeta$ 的框图如图 4.3 所示，若每一个回路都是稳定的，则整个系统 (即 U_2^{-1}) 才是稳定的。根据小增益定理，每个回路稳定的条件为：$\|a_1 F_1\|_\infty < 1$ 或 $|a_1| < \dfrac{1}{\|F_1\|_\infty}$。综上所述，为了得到

$$U_2(\sigma_1) = r_1, \quad U_2(\sigma_2) = r_2, \quad 且\ U_2^{-1} \in \zeta$$

图 4.3　U_2^{-1} 的框图

可选择合适的 $a_1 \in \mathbb{R}$，整数 l_1，$F_1(s) \in \zeta$，使得

$$F_1(\sigma_1) = 0$$

$$a_1 = \left(\sqrt[l_1]{\frac{r_2}{r_1}} - 1 \right) \Big/ F_1(\sigma_2)$$

$$\|a_1 F_1\|_\infty < 1 \ 或\ |a_1| < \frac{1}{\|F_1\|_\infty}$$

假设这样进行到第 k 步，继续令

$$U_{k+1}(s) = (1 + a_k F_k(s))^{l_k} U_k(s)$$

满足

$$U_{k+1}(\sigma_i) = r_i, \quad i = 1, \cdots k+1, \quad 且 \ U_{k+1}^{-1} \in \zeta$$

当 $k = m-1$ 时，令 $U_m(s) = U(s)$，则有

$$U,\ U^{-1} \in \zeta,\ U(\sigma_i) = r_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

最后，由 $U = Y - NQ$，得到 $Q = \dfrac{Y-U}{N}$，于是有

$$\begin{aligned} C &= \frac{X + MQ}{Y - NQ} \\ &= \frac{X + M\dfrac{Y-U}{N}}{U} \\ &= \frac{NX + YM - MU}{NU} \\ &= \frac{1 - MU}{NU} \end{aligned}$$

稳定，即 $P = \dfrac{N}{M}$ 是可强镇定的。 □

例 4.5 设对象的传递函数为

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

判断其是否可强镇定的。

对象的实零点为：$s=1$ 和 $s=\infty$，在这两个零点之间只有一个极点 $s=1$，根据定理 4.3 可知系统是不可强镇定的。

例 4.6 判断对象

$$P(s) = \frac{(s-1)^2(s^2-s+1)}{(s-2)^2(s+1)^3}$$

是否为可强镇定的。

传递函数的零点为：$s=1,\ \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}),\ \infty$。系统的极点为：$s=2$（二阶），$-1$（三阶）。其中在右半平面的实零点为：$s=1$ 和 $s=\infty$。在这两个零点之间有两个相同的极点 $s=2$，所以系统是可强镇定的。

例 4.7 设有对象的传递函数为

$$P(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}$$

判断其是否可强镇定的，如果可强镇定，求出其强镇定控制器。

对象的零点为：$s=1$，∞。在这两个零点之间有两个相同的极点 $s=2$，根据定理 4.3 可知系统是可强镇定的。将 $P(s)$ 在 ζ 中的互质分解为 $P(s)=\dfrac{N(s)}{M(s)}$，于是有

$$N(s)=\frac{s-1}{(s+2)^2},\quad M(s)=\frac{(s-2)^2}{(s+2)^2}$$

参数化的镇定控制器

$$C=\frac{X+MQ}{Y-NQ},\quad \forall Q\in\zeta$$

令 $U\overset{\text{def}}{=}Y-NQ$，欲使得控制器 C 稳定，需有 $U^{-1}\in\zeta$，注意到

$$N(1)X(1)+M(1)Y(1)=M(1)Y(1)=1$$
$$N(\infty)X(\infty)+M(\infty)Y(\infty)=M(\infty)Y(\infty)=1$$

所以，为了得到稳定的控制器 C，需要找到一个 $U\in\zeta$ 满足 $U^{-1}\in\zeta$，同时满足下面的关系：

$$\begin{aligned}U(1)&=Y(1)-N(1)Q(1)\\&=Y(1)=\frac{1}{M(1)}\\&=4\\U(\infty)&=Y(\infty)-N(\infty)Q(\infty)\\&=Y(\infty)\\&=\frac{1}{M(\infty)}\\&=1\end{aligned}$$

首先，寻找 $U_1\in\zeta$ 使得

$$U_1^{-1}\in\zeta,\quad U_1(1)=4$$

最简单的办法就是选择一个常数 $U_1(s)=4$。下面寻找一个

$$U_2(s)=(1+aF(s))^l\,U_1(s)$$

其中 $a\in\mathbb{R}$ 是一个常数，l 为一整数，$F(s)\in\zeta$。为保证

$$U_2(1)=(1+aF(1))^l\,U_1(1)=4$$

需要有 $F(1)=0$，可以作如下选择：

$$F(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

为了使

$$U_2(\infty)=(1+aF(\infty))^lU_1(\infty)=(1+a)^l4=1$$

必须有 $a=\sqrt[l]{\frac{1}{4}}-1$。为了使 $U_2^{-1}\in\zeta$，需要让 $\|aF\|_\infty<1$，从而需要有 $|a|<\frac{1}{\|F\|_\infty}=1$，即 $\left|\sqrt[l]{\frac{1}{4}}-1\right|<1$。可选择 $l=1$，则 $a=-\frac{3}{4}$。于是有

$$\begin{aligned}U(s)&=U_2(s)\\&=\left(1-\frac{3}{4}\frac{s-1}{s+1}\right)\cdot 4\\&=\frac{s+7}{s+1}\\&=Y(s)-N(s)Q(s)\end{aligned}$$

进一步有

$$Q(s)=\frac{U(s)-Y(s)}{N(s)}$$

最后得到

$$\begin{aligned}C(s)&=\frac{X(s)+M(s)Q(s)}{U(s)}\\&=\frac{1-M(s)U(s)}{N(s)U(s)}\\&=\frac{27}{s+7}\end{aligned}$$

下面我们求出闭环系统的极点来验证结果的正确性。

$$L(s)\overset{\text{def}}{=}P(s)C(s)=\frac{27(s-1)}{(s+7)(s-2)^2}$$

$$1+L(s)=\frac{(s+1)^3}{(s-2)^2(s+7)}=0$$

得闭环系统的极点为 $s=-1$(三阶)。所以系统内稳定。

4.5 同时镇定

本节研究用单一控制器 (固定参数) 镇定多个不同对象的问题。考察下面对象:

$$(P_0)\quad\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\y=g(x,u)\end{cases}$$

在 (x_1,u_1) 处进行线性化后得

$$(P_1)\quad\begin{cases}\dot{x}=A_1x+B_1u\\y=C_1x+D_1u\end{cases}$$

其中

$$A_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\u=u_1}}, \quad B_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_1\\u=u_1}}, \quad C_1 = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\u=u_1}}, \quad D_1 = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_1\\u=u_1}}$$

并且有

$$P_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$$

当 x, u 在 (x_1, u_1) 的 δ 邻域内变动时，$P_1(s)$ 可代替 P_0 获得满意精度。当 x, u 变动过大时，需要重新线性化

$$P_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

在工程上，称之为用固定参数控制器镇定不同操作点 (x_1, u_1)，或 (x_2, u_2) 下工作的对象。这就是本节将研究的同时镇定问题。

定义 4.4 (同时镇定) 给定对象 P_1, P_2，如果存在控制器 C，与 P_1 或 P_2 构成的闭环系统均是内稳定的，则称 P_1, P_2 是可同时镇定的，C 为对象 P_1, P_2 的同时镇定控制器。

将 P_1, P_2 在 ζ 进行互质分解，

$$P_i = \frac{N_i}{M_i}, \quad X_iN_i + Y_iM_i = 1, \quad M_i, N_i, X_i, Y_i \in \zeta, \quad i = 1, 2$$

定义

$$P = \frac{N}{M} = \frac{N_2M_1 - N_1M_2}{N_2X_1 + M_2Y_1}$$

定理 4.4 P_1、P_2 可以同时镇定的，当且仅当 P 可以强镇定。

证明 假设 P_1, P_2 可以同时镇定的，下面我们推导出其等价条件是 P 可以强镇定。对于对象 P_i，可使闭环系统内稳定的控制器为

$$C_i = \frac{X_i + M_iQ_i}{Y_i - N_iQ_i}, \quad Q_i \in \zeta, \quad i = 1, 2$$

则 P_1, P_2 是可同时镇定的，当且仅当存在 Q_1, $Q_2 \in \zeta$, 使 $C_1 = C_2$，即

$$\frac{X_1 + M_1Q_1}{Y_1 - N_1Q_1} = \frac{X_2 + M_2Q_2}{Y_2 - N_2Q_2}$$

由于 $X_i + M_iQ_i$ 与 $Y_i - N_iQ_i$ 互质，所以以上方程成立，当且仅当存在一个 $U \in \zeta$，满足 $U^{-1} \in \zeta$，且

$$X_1 + M_1Q_1 = U(X_2 + M_2Q_2)$$

$$Y_1 - N_1Q_1 = U(Y_2 - N_2Q_2)$$

将上两式写成矩阵表达式的形式

$$[1 \quad Q_1]\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ M_1 & -N_1 \end{bmatrix} = U[1 \quad Q_2]\begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \\ M_2 & -N_2 \end{bmatrix}$$

两边分别右乘以矩阵

$$\begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \\ M_2 & -N_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

得到

$$[1 \quad Q_1]\begin{bmatrix} X_1N_2 + Y_1M_2 & X_1Y_2 - Y_1X_2 \\ M_1N_2 - N_1M_2 & M_1Y_2 + N_1X_2 \end{bmatrix} = U[1 \quad Q_2]$$

定义

$$X = X_1Y_2 - Y_1X_2$$
$$Y = M_1Y_2 + N_1X_2$$

进一步有

$$[1 \quad Q_1]\begin{bmatrix} M & X \\ N & Y \end{bmatrix} = U[1 \quad Q_2]$$

或

$$M + NQ_1 = U$$
$$X + YQ_1 = UQ_2$$

综上所述，P_1, P_2 是可同时镇定当且仅当存在 ζ 中存在 $Q_1, Q_2, U \in \zeta$，满足

$$U^{-1} \in \zeta$$
$$M + NQ_1 = U$$
$$X + YQ_1 = UQ_2$$

由于 Q_2 可以从上面第 3 个方程中得到，即

$$Q_2 = \frac{X + YQ_1}{U} \in \zeta$$

于是，上面的条件等价为在 ζ 中寻找 $Q_1, U \in \zeta$，满足

$$U^{-1} \in \zeta$$
$$M + NQ_1 = U$$

如果令 $N_c = Q_1 U^{-1}$，$M_c = U^{-1}$，则有

$$NN_c + MM_c = (NQ_1 + M)\,U^{-1} = U \cdot U^{-1} = 1$$

于是有

$$(NN_c + MM_c)^{-1} \in \zeta$$

根据引理 4.1，有

$$C = \frac{N_c}{M_c} = \frac{Q_1 U^{-1}}{U^{-1}} = Q_1 \in \zeta$$

为控制器可以镇定对象 $P = \dfrac{N}{M}$。注意到 $C \in \zeta$，可知，P 是可强镇定的。 □

值得注意的是，上面定理仅仅给出了 P_1, P_2 可同时镇定的充分必要条件，并没有给出其同时镇定控制器的具体形式。

例 4.8　考察以下对象

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad P_2(s) = \frac{as+b}{(s+1)(s-1)}$$

其中 a, b 为实常数，且 $a \neq 1$，求出当 a, b 为何值时，P_1, P_2 可同时镇定。

由于 $P_1(s) \in \zeta$，有

$$N_1 = P_1(s), \quad M_1 = 1, \quad X_1 = 0, \quad Y_1 = 1$$

对 $P_2(s)$ 互质分解，有

$$P_2(s) = \frac{N_2}{M_2}, \quad X_2 N_2 + Y_2 M_2 = 1, \quad X_2, Y_2, M_2, N_2 \in \zeta$$

则

$$\begin{aligned} N &= N_2 M_1 - N_1 M_2 = N_2 - P_1 M_2 \\ M &= N_2 X_1 + M_2 Y_1 = M_2 \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} P &= \frac{N}{M} \\ &= \frac{N_2 - P_1 M_2}{M_2} \\ &= P_2 - P_1 \\ &= \frac{as + b - s + 1}{(s+1)(s-1)} \\ &= \frac{(a-1)s + (b+1)}{(s+1)(s-1)} \end{aligned}$$

P 的零点为 $s=\dfrac{-(b+1)}{a-1},\infty$；$P$ 的极点 $s=1,-1$。则 P_1,P_2 可同时镇定的当且仅当 P 是可强镇定，这就需要

$$-\frac{1+b}{1-a}<0 \text{ 或 } \frac{1+b}{1-a}>1$$

4.6 注　　记

本章内容由文献 [1] 的第 5 章改写而成。

4.7 习　　题

1. 设一传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

求其在 ζ 中的互质分解。

2. 已知一个对象为

$$P(s)=\frac{1}{s-1}$$

求控制器 C 使得反馈系统内稳定，且当 $r(t)$ 为单位阶跃信号及 $d(t)=0$ 时，系统的跟踪误差信号满足 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$。

3. 已知一个对象为

$$P(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

求控制器 C 使得反馈系统内稳定，且当 $r(t)$ 为单位阶跃信号及 $d(t)=\sin(2t)$ 时，系统的跟踪误差信号满足 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$。

4. 假设 N,M 是 ζ 中的互质函数，如果 $NM\in\zeta$，求证：$M^{-1}\in\zeta$。

参 考 文 献

[1] Doyle J C, 弗朗西斯 B A, 坦嫩鲍姆 A R. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京：清华大学出版社, 1993.

第 5 章　H_∞ 控制的设计方法

自 1981 年加拿大学者 Zames 首次提出 H_∞ 控制问题以来，该问题在控制理论界受到了极大的关注，并获得了快速的发展。逐渐成为控制理论中的重要研究方向和组成部分，也成为工程应用中强有力的依据。本章在描述了 H_∞ 标准控制问题的基础上，将几种常用的控制问题等价转化为标准 H_∞ 控制问题。最后简单介绍了 H_∞ 控制的优化算法。

5.1　频域中的 H_∞ 控制问题

考虑如图 5.1 所示的不确定反馈系统，其中 w 是外部输入，z 是系统控制输出，包括跟踪误差，调节误差等，y 是系统测量输出，u 是系统控制输入。$\Delta(s)$ 是系统的不确定部分。为了处理的方便，我们将图 5.1 简化成如图 5.2 所示的形式。假设 G 为真有理矩阵，表示广义的被控制对象，并且分块为

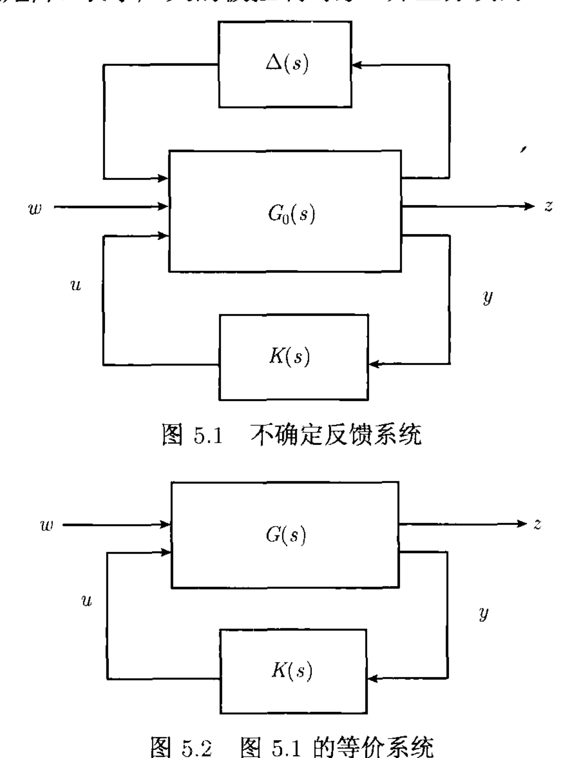


图 5.1　不确定反馈系统

图 5.2　图 5.1 的等价系统

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

于是有

$$z = G_{11}w + G_{12}u$$

$$y = G_{21}w + G_{22}u$$

注意到 $u = Ky$，消去上式中的 u 和 y，于是得到

$$z = \left[G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}\right] w$$

为了使问题简化，假设 $I - G_{22}K$ 对每一个真有理矩阵 K 都是可逆的。将上式简写成

$$z = H(G, K)w$$

H_∞ 标准控制问题可以描述为：寻找一个真实有理的控制矩阵 K，在 K 镇定 G 的情况下，使得从 w 到 z 的传递矩阵的 H_∞ 范数极小化，即

$$\min_K \|H(G, K)\|_\infty$$

若给定常数 $\gamma > 0$，寻找一个真实有理的控制矩阵 K，在 K 镇定 G 的情况下，使得从 w 到 z 的传递矩阵的 H_∞ 小于 $\gamma > 0$，即

$$\|H(G, K)\|_\infty < \gamma$$

则变成次优的 H_∞ 控制问题。

5.2 H_∞ 控制的各类问题

在 5.1 节介绍的标准 H_∞ 控制问题中，广义对象 G 并不一定就是实际的受控对象。即使实际被控对象相同，针对不同的控制目标，广义对象也可能不相同。标准的 H_∞ 控制问题比较重要，实际中的很多控制问题均可以等价为该问题本节将说明灵敏度极小化问题、鲁棒镇定问题、模型匹配问题、跟踪问题等如何等价转化为标准 H_∞ 控制，也即推出上述各种问题所对应的广义对象 P 和控制器 K。

5.2.1 灵敏度极小化问题

Zames 于 1981 年提出 H_∞ 控制思想的时候，首先考虑了一个单输入单输出系统的设计问题：对于属于有限能量的信号集的干扰信号，设计一个控制器使得闭环系统稳定，并且使得系统外部干扰对系统的控制输出影响最小。这便是本小节的灵敏度极小化问题。

考虑如图 5.3 所示单变量单位反馈系统。图中 P 为对象的传递函数，C 为控制器的传递函数，w 为作用在系统上的干扰信号，z 为控制系统的输出。从 w 到 z 的闭环传递函数，即反馈系统的灵敏度函数为

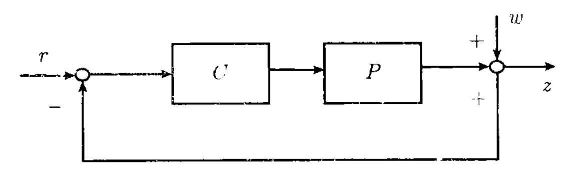


图 5.3　SISO 反馈回路

$$S = \frac{1}{1+PC} \tag{5.1}$$

灵敏度函数表示了控制系统输出对干扰的灵敏度。理想情况下 $S=0$。灵敏度极小化问题实质上就是寻找一个控制器 C 在镇定系统的同时，使得敏感函数的峰值极小化。这个峰值定义为

$$\|S\|_\infty = \max_{w\in\mathbb{R}} |S(\mathrm{j}w)| \tag{5.2}$$

由于敏感函数的峰值可能并不存在，所以用上确界代替式 (5.2) 的最大值，即

$$\|S\|_\infty = \sup_{w\in\mathbb{R}} |S(\mathrm{j}w)| \tag{5.3}$$

如果能保证灵敏度函数 S 的峰值 $\|S\|_\infty$ 小，则在所有频率上 S 的幅值都小。于是干扰被衰减。因此该方法相当于极小化最坏干扰对输出的影响。在最坏的情况下，希望找到一个控制器 C，使得它能最好地抑制存在的最坏干扰。每个实际对象 P 和控制器 C 的频率响应函数在高频处都会有衰减，这表明灵敏度函数 $S=1/(1+PC)$ 在低频处可以很小，在高频处渐进趋近 1。灵敏度函数 S 在低频处的大小并没有反映到峰值中，但是它对于控制系统的性能来说是最重要的。因此通常引入频率加权函数 W，并考虑如下极小化问题：

$$\|WS\|_\infty = \sup_{w\in R} |W(\mathrm{j}w)S(\mathrm{j}w)| \tag{5.4}$$

W 在低频处很大，到高频处就衰减下来。令 $\phi = WS$，由

$$\phi = W(I+PC)^{-1} = W - WPC(I+PC)^{-1}$$

可知，相应的广义对象 G 和 K 取为

$$G = \begin{bmatrix} W & -WP \\ I & -P \end{bmatrix}, \quad K = C$$

这样一来，敏感函数极小化问题就转化为标准的 H_∞ 控制问题。

5.2.2 模型匹配问题

如图 5.4 所示为模型匹配问题，即用 3 个串联的传递函数矩阵 T_3, Q, T_2 来逼近传递函数矩阵 T_1。这里 $T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{RH}_\infty$ 为给定矩阵。$Q \in \mathrm{RH}_\infty$ 为待设计的矩阵。模型匹配准则为选择 $Q \in \mathrm{RH}_\infty$ 使得

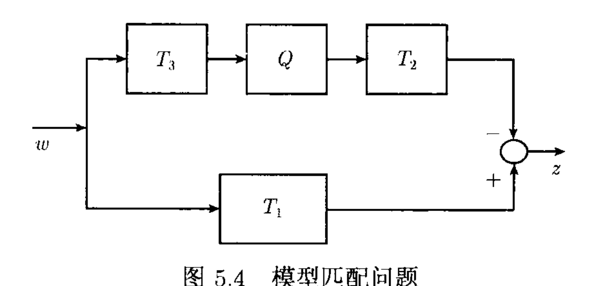


图 5.4 模型匹配问题

$$\sup\{\|z\|_2 : w \in H_2, \|w\|_2 \leqslant 1\}$$

取得极小值，即

$$\min_Q \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$$

定义

$$G := \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = -Q$$

可将模型匹配问题转化为标准的 H_∞ 控制问题。这里，K 镇定 G 这个约束条件等价于 $Q \in \mathrm{RH}_\infty$。

5.2.3 跟踪问题

考虑如图 5.5 所示的系统，其中 P 和 W 是给定的实有理传递函数，C_1 和 C_2 为待设计控制器。设计的目的在于使得系统 P 的输出 v 跟踪参考信号 r。这里 r 为一个不确定信号，且属于下列集合：

$$\{r : r = Ww, \quad w \in H_2, \quad \|w\|_2 \leqslant 1\}$$

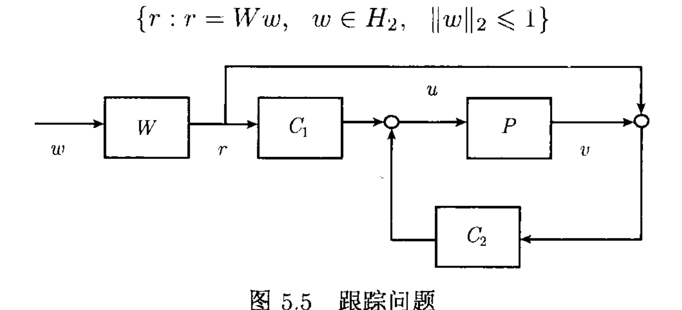


图 5.5 跟踪问题

跟踪误差信号为 $e = r - v$，性能函数为

$$(\|e\|_2^2 + \rho\|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

加权因子 ρ 为正的标量。注意式 (5.5) 可等价于 $z = \begin{bmatrix} e \\ \rho u \end{bmatrix}$ 的 H_2 范数。跟踪准则选为

$$\min_{C_1,C_2} \sup\{\|z\|_2 : w \in H_2, \|w\|_2 \leqslant 1\}$$

于是，定义

$$y := \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}, \quad K := [\,C_1 \quad C_2\,], \quad G := \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G21 & G_{22} \end{bmatrix}$$

$$G_{11} := \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{12} := \begin{bmatrix} -P \\ \rho I \end{bmatrix}, \quad G_{21} := \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_{22} := \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$$

可将本小节的跟踪问题等价转化为标准 H_∞ 控制问题。

5.2.4　鲁棒控制问题

考虑如图 5.6 所示的系统，其中 P 为标称系统，实际控制对象为受到加形摄动的不确定系统 $P + \Delta P$，这里的 ΔP 满足条件

$$\sigma_{\max}[\Delta P(\mathrm{j}\omega)] < |r(\mathrm{j}\omega)|, \quad \omega \in \mathrm{R}$$

其中 $r \in \mathrm{RH}_\infty$ 为标量值函数，鲁棒镇定的目的即找到一个真实有理矩阵 K，镇定上面描述的不确定系统。

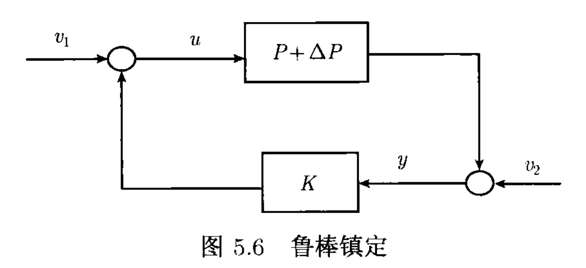


图 5.6　鲁棒镇定

引理 5.1　一个真实有理矩阵 K 能镇定所有不确定系统 $P + \Delta P$，当且仅当 K 能镇定标称系统 P 并且有

$$\|rK(I - PK)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$$

通过定义 $G := \begin{bmatrix} 0 & rI \\ I & P \end{bmatrix}$，可以将鲁棒镇定问题转化为标准 H_∞ 控制问题。

前面举了控制系统设计中常用到的几个例子，它们都可以转化为相应的标准 H_∞ 问题。下面介绍 H_∞ 控制的频域算法来进行求解。

5.3 H_∞ 控制的频域优化算法

虽然可以分别从时域和频域来对 H_∞ 控制问题进行求解，但 H_∞ 控制本质上还是频域的控制理论。本节主要介绍频域中最简单的方法：基于 J 谱因子分解的方法。

由图 5.2 可知，从 w 到 z 的闭环传递函数阵为

$$H = G_{11} + G_{12}(I - KG_{22})^{-1}KG_{21} \tag{5.6}$$

在求解标准 H_∞ 控制问题时，常常并不是直接解决 $\|H\|_\infty$ 的极小化问题，而是首先寻找一个次优 H_∞ 控制器，也即寻找一个控制器，使得其能镇定闭环系统并且满足

$$\|H\|_\infty \leqslant \gamma \tag{5.7}$$

其中 γ 为一给定的非负常数。然后通过寻优找到 γ 的最小值，进而获得最优的 H_∞ 控制器。式 (5.7) 等价于

$$H^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega) \leqslant \gamma^2 I, \quad \omega \in R \tag{5.8}$$

如果其中的 H 是有理函数矩阵，记 $H^\sim(s) = H^{\mathrm{T}}(-s)$。式 (5.8) 进一步等价表示为

$$H^\sim H \leqslant \gamma^2 I$$

下面在介绍求解标准 H_∞ 控制问题的时候，仅仅考虑的是一种比较简单的情况，即研究的传递函数具有下面这种特殊形式：

$$H = P - K$$

其中 P 为给定不稳定对象的传递函数矩阵，K 为待设计的稳定传递函数阵。该问题常被称作是 Nehari 问题。定义 $G_{11} = P, G_{12} = -I, G_{21} = I, G_{22} = 0$，便可将该问题转化为 H_∞ 标准控制问题。

将 $H = P - K$ 代入式 (5.8) 中，可以得到

$$P^\sim P - P^\sim K - K^\sim P + K^\sim K \leqslant \gamma^2 I, \quad \omega \in R$$

即

$$\begin{bmatrix} I & K^\sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 I - P^\sim P & P^\sim \\ P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.9}$$

定义

$$\pi_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^2 I - P^\sim P & P^\sim \\ P & -I \end{bmatrix}$$

为了对该问题求解，将控制器 K 定义为下面的形式：

$$K = YX^{-1} \tag{5.10}$$

其中 Y 和 X 均为稳定的有理函数矩阵。在式 (5.9) 的左右分别乘以 $X^\sim$ 和 X，然后利用式 (5.10) 可知：$\|H\|_\infty \leqslant \gamma$ 等价于

$$[X^\sim \quad Y^\sim]\pi_\gamma \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R \tag{5.11}$$

这样的等价不仅仅存在于 Nehari 问题中。可以证明，对于一般情况，$\|H\|_\infty \leqslant \gamma$ 也与式 (5.11) 等价，此时 π_γ 的形式定义为

$$\pi_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -G_{12}^\sim & -G_{22}^\sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 I - G_{11}G_{11}^\sim & -G_{11}G_{12}^\sim \\ -G_{21}G_{11}^\sim & -G_{21}^\sim G_{22}^\sim \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -G_{12} \\ I & -G_{22} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

下面再回到 Nehari 问题，π_γ 为准 Hermitian 矩阵，且 $\pi_\gamma^\sim = \pi_\gamma$。如果 $\det \pi_\gamma$ 在虚轴上没有极点和零点，则可对 π_γ 进行 J 谱分解

$$\pi_\gamma = Z_\gamma^\sim J Z_\gamma \tag{5.13}$$

其中 Z_γ 是有理矩阵，且 Z_γ^{-1} 的所有极点都位于左半开平面内。J 为常数矩阵，且具有下面的形式：

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

其中的两个单位矩阵均具有适当维数。称 J 为 π_γ 的特征矩阵。根据 J 谱因子分解式 (5.13)，式 (5.11) 可以改写为

$$[X^\sim \quad Y^\sim] Z_\gamma^\sim J Z_\gamma \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R \tag{5.15}$$

选择稳定的有理方阵 A 和 B，使得下式成立：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Z_\gamma \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

于是，式 (5.15) 可进一步等价为

$$A^\sim A \geqslant B^\sim B, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R \tag{5.17}$$

由式 (5.16) 可得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = Z_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

可见满足约束条件 $\|H_\infty\| \leqslant \gamma$ 的所有控制器 $K = YX^{-1}$ 可以通过式 (5.17) 和式 (5.18) 来求解。满足式 (5.17) 的稳定的有理矩阵 A 和 B 不是唯一的，常选择 $A = I, B = 0$，该解也被称为中心解。

下面来验证根据式 (5.17) 和式 (5.18) 求出的控制器是否能镇定闭环系统，能镇定的一个必要条件是 $\det A$ 的所有零点位于左半平面，进一步可以证明：如果满足 $\|H_\infty\| \leqslant \gamma$ 的镇定控制器存在，那么所有满足该条件的控制器均可由式 (5.17) 和式 (5.18) 求出，其中 $\det A$ 的所有零点均位于左半平面内。

由前面的讨论可知，H_∞ 最优控制问题的求解步骤如下：

(1) 给定 γ 的初始值。

(2) 求 J 谱因子 Z_γ，并根据式 (5.17) 和式 (5.18) 求出相应的控制器，使得 $\det A$ 的所有零点位于左半平面内，最常见的解可能是中心解。

(3) 验证控制器是否能镇定闭环系统。若能，则减小 γ，否则增大 γ。

(4) 如果已经充分逼近最优解，则停止计算，否则返回 (2)。

有理 J 谱因子分解式 (5.13) 可以简化为两个多项式矩阵的 J 谱因子分解，一个是分母多项式，另一个是分子多项式。上述寻优过程有两种停止方法。一种方法是不断减小 γ，直到 γ 等于某一极小值，当再减小 γ 小于此极小值的时候，J 谱因子分解不存在。对应这个极小值 γ 求解出的次优控制器便是最优控制器。另一方法逐渐是减小 γ，直到当 γ 减至某一值的时候，J 谱因子虽存在，但没有次优的控制器能镇定闭环系统，那么这个值，便是 γ 的最优值。这两种方法中，后一种方法更为常用。

实践表明，当 γ 接近最优值的时候，J 谱因子分解可能会出现奇异现象，即谱因子 Z_γ 的有理函数系数会无限增长。同时当 $\gamma = \gamma_{\mathrm{opt}}$ 的时候，求出中心解得到的闭环系统，其闭环极点会无限接近左半平面的界，即从左半平面穿越虚轴到右半平面，反之亦然。由于闭环传递函数 H 不能具有这种不稳定的极点，所以该极点一定是在 H 中被抵消了。其实，这种抵消是发生在控制器 $C(s)$ 中，因此可以被取消。为了避免 J 谱因子分解出现的奇异现象，一般对其进行部分分解，这种分解可以比较精确地求出最优解。奇异现象和抵消现象一般不会常常发生。如果没有发生这些现象，则可对 γ 寻优得到最优解，该解是使得 $\det \pi_\gamma$ 在虚轴上具有极点或零点的最大值。

上面只介绍了 Nehari 问题的求解，这是一种特殊的 H_∞ 控制问题，该问题比较简单，对于一般性的 H_∞ 控制问题，读者可进一步参阅相关文献。

5.4 注　　记

本章内容由文献 [1] 的第 2 章及文献 [2] 的相关内容整理而成。

5.5 习　　题

1. 试从灵敏度极小化问题说明 H_∞ 控制的物理意义。

参考文献

[1] 史忠科, 吴方向, 王蓓. 鲁棒控制理论. 北京：国防工业出版社, 2003.
[2] 解学书, 钟宜生. H_∞ 控制理论. 北京：清华大学出版社, 1994.

第 6 章　基于回路成形的设计方法

本章介绍一种鲁棒控制器设计的图形化方法 —— 回路成形。

6.1　回路成形的基本方法

鲁棒控制的基本目的就是针对不确定对象，设计一个控制器 $C(s)$ 保证系统内稳定的同时满足一定的性能。由第 3 章的内容可知，这样的设计要求可归结为使得闭环系统满足下面的不等式：

$$\| \, |W_1 S| + |W_2 T| \, \|_\infty < 1 \tag{6.1}$$

换句话说，鲁棒控制就是给定对象 P，以及权函数 W_1 和 W_2，设计一个控制器 $C(s)$ 保证闭环系统满足式 (6.1)。求解该问题是相当困难的。首先是问题不一定有解，即便是有解，要得到控制器也并不容易。本章介绍一种图形化方法，如果解存在，通过该方法可能会得到系统的一个控制器。回路成形的大体思路为：构造回路传递函数 L 近似满足式 (6.1)，然后由 $C = L/P$ 得到 C。由定理 2.2 可知，当 P 或者 P^{-1} 是不稳定的，L 必须包含 P 的不稳定极点和零点，这样一来就加大了求解的困难，所以本章我们假设 P 或者 P^{-1} 是稳定的。注意到 $S = \dfrac{1}{1+L}$，$T = \dfrac{L}{1+L}$，代入到式 (6.1) 中有

$$\Gamma(\mathrm{j}w) = \left|\frac{W_1(\mathrm{j}w)}{1+L(\mathrm{j}w)}\right| + \left|\frac{W_2(\mathrm{j}w)L(\mathrm{j}w)}{1+L(\mathrm{j}w)}\right| < 1 \tag{6.2}$$

回路成形的基本思路就是找到一个函数 $L(\mathrm{j}w)$，使得式 (6.2) 对所有的 w 都成立。

引理 6.1　式 (6.1) 成立的必要条件是权函数 W_1 和 W_2 需满足

$$\min\{|W_1(\mathrm{j}w)|, |W_2(\mathrm{j}w)|\} < 1, \quad \forall w \tag{6.3}$$

证明　固定一 w，并假设 $|W_1| \leqslant |W_2|$，注意到 $S + T = 1$，于是有

$$\begin{aligned} |W_1| &= |W_1(S+T)| \\ &\leqslant |W_1 S| + |W_1 T| \\ &\leqslant |W_1 S| + |W_2 T| \end{aligned}$$

由式 (6.1) 可知，$|W_1S|+|W_2T|<1$，于是有 $|W_1|<1$。因此有式 (6.3) 成立。同理，当 $|W_2|<|W_1|$ 时，可导出同样的结论。下面从式 (6.2) 中推导出一些不等式。为了简单，推导过程中省略变量 $\mathrm{j}w$。 □

引理 6.2 如果式 (6.1) 成立，则下面几个不等式都成立。

$$(|W_1|-|W_2|)|S|+|W_2|\leqslant \varGamma \leqslant (|W_1|+|W_2|)|S|+|W_2| \tag{6.4}$$

$$(|W_2|-|W_1|)|T|+|W_1|\leqslant \varGamma \leqslant (|W_2|+|W_1|)|T|+|W_1| \tag{6.5}$$

$$\frac{|W_1|+|W_2L|}{1+|L|}\leqslant \varGamma \leqslant \frac{|W_1|+|W_2L|}{|1-|L||} \tag{6.6}$$

证明 注意到 $S=\dfrac{1}{1+L}$，根据式 (6.2) 中 $\varGamma$ 的定义有

$$\begin{aligned}\varGamma &= \left|\frac{W_1(\mathrm{j}w)}{1+L(\mathrm{j}w)}\right|+\left|\frac{W_2(\mathrm{j}w)L(\mathrm{j}w)}{1+L(\mathrm{j}w)}\right| \\ &= |W_1S|+|W_2||1-S|\end{aligned}$$

因为 $1-|S|\leqslant|1-S|\leqslant 1+|S|$，得

$$|W_1S|+|W_2|(1-|S|)\leqslant \varGamma \leqslant |W_1S|+|W_2|(1+|S|)$$

整理可得式 (6.4)。由 $T=\dfrac{L}{1+L}$ 及 $\varGamma$ 的定义有

$$\varGamma = |W_1||1-T|+|W_2T|$$

注意到 $1-|T|\leqslant|1-T|\leqslant 1+|T|$，得

$$|W_1|(1-|T|)+|W_2T|\leqslant \varGamma \leqslant |W_1|(1+|T|)+|W_2T|$$

进一步可得式 (6.5)。由于 $|1-|L||\leqslant|1+L|$，得到

$$\left|\frac{W_1}{1+L}\right|<\frac{|W_1|}{|1-|L||}$$
$$\left|\frac{W_2L}{1+L}\right|<\frac{|W_2L|}{|1-|L||}$$

于是有 $\varGamma<\dfrac{|W_1|+|W_2L|}{|1-|L||}$。又由于 $|1+L|\leqslant 1+|L|$，得到

$$\left|\frac{W_1}{1+L}\right|>\frac{|W_1|}{1+|L|}$$
$$\left|\frac{W_2L}{1+L}\right|>\frac{|W_2L|}{1+|L|}$$

于是有 $\Gamma > \frac{|W_1| + |W_2 L|}{1 + |L|}$。综上可得式 (6.6)。 □

假设 $|W_2| < 1$，那么从式 (6.4) 中可得

$$\Gamma < 1 \Leftarrow \frac{|W_1| + |W_2|}{1 - |W_2|}|S| < 1 \tag{6.7}$$

$$\Gamma < 1 \Rightarrow \frac{|W_1| - |W_2|}{1 - |W_2|}|S| < 1 \tag{6.8}$$

从式 (6.6) 中可得

$$\Gamma < 1 \Leftarrow |\Gamma| > \frac{|W_1| + 1}{1 - |W_2|} \tag{6.9}$$

$$\Gamma < 1 \Rightarrow |\Gamma| > \frac{|W_1| - 1}{1 - |W_2|} \tag{6.10}$$

当 $|W_1| \gg 1$，(6.7) 和 (6.8) 两式右边的条件相互趋近，(6.9) 和 (6.10) 两式右边的条件也相互趋近。因此我们把式 (6.2) 中 $\Gamma < 1$ 成立的条件近似为

$$\frac{|W_1|}{1 - |W_2|}|S| < 1 \tag{6.11}$$

或者

$$|L| > \frac{|W_1|}{1 - |W_2|} \tag{6.12}$$

现在我们假设 $|W_1| < 1$，同理，从式 (6.5) 中可得

$$\Gamma < 1 \Leftarrow \frac{|W_2| + |W_1|}{1 - |W_1|}|T| < 1$$

$$\Gamma < 1 \Rightarrow \frac{|W_2| - |W_1|}{1 - |W_1|}|T| < 1$$

式 (6.6) 中可得

$$\Gamma < 1 \Leftarrow |\Gamma| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2| + 1}$$

$$\Gamma < 1 \Rightarrow |\Gamma| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2| - 1}$$

当 $|W_2| \gg 1$，同理，我们可把 $\Gamma < 1$ 成立的条件近似为

$$\frac{|W_2|}{1 - |W_1|}|T| < 1 \tag{6.13}$$

$$|L| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2|} \tag{6.14}$$

上面的讨论可以概括如下：

(1) 当 $|W_1| \geqslant 1 > |W_2|$ 成立，为了使式 (6.2) 成立，回路传递函数的幅值应当满足式 (6.12)；

(2) 当 $|W_2| \geqslant 1 > |W_1|$ 成立，为了使式 (6.2) 成立，回路传递函数的幅值应当满足式 (6.14)。

下面研究用回路成形法设计控制器的步骤。考虑一个典型的情况：$|W_1(\mathrm{j}w)|$ 是 w 的减函数，$|W_2(\mathrm{j}w)|$ 是 w 的增函数。这样一来，在低频段有

$$|W_1| > 1 > |W_2|$$

在高频段有

$$|W_2| > 1 > |W_1|$$

回路成形的思路大致为：

(1) 在低频范围内 $|W_1| > 1 > |W_2|$，画出 $\dfrac{|W_1|}{1-|W_2|}$ 的幅值对频率的对数曲线；在高频范围内 $|W_2| > 1 > |W_1|$，画出 $\dfrac{1-|W_1|}{|W_2|}$ 的幅值对频率的对数曲线 (图 6.1)。

(2) 通过这两条曲线画出 L 的曲线：在低频段，让它位于第一条曲线之上，同时远大于 1；在高频段，让它位于第二条曲线之下，同时远小于 1；在更高的频段，让它下降的斜率至少与 P 一样大 (这样才能保证 C 是正则的)；然后在从低频段到高频段要平滑转换，且保持曲线的斜率在此频段附近尽可能平缓 (平缓的原因将在下面内容进一步说明)。

(3) 找到一稳定的最小相位的传递函数 L，它的 Bode 幅频特性曲线就是上面第二步构造的曲线，然后规范化使 $L(0) > 0$。

这样构造的 L 曲线在低频段满足式 (6.12)，在高频段满足式 (6.14)，因此在低频段和高频段式 (6.2) 都成立。需要注意的是，式 (6.2) 在中频段上不一定成立，这就需要构造 L 曲线的时候，在这个过渡频率段的转换要非常的小心，因为这可能导致系统不是内稳定的。从下一节推导的相位公式可知，如果 $L(0) > 0$，且 L 就像前面构造的那样是一个减函数，则 L 的幅角从 0 开始减小，因此 L 的 Nyquist 图从正实轴出发按顺时针方向移动，根据 Nyquist 判据，如果 L 的幅角在过渡频率段处大于 $-180°$，即过渡频段出现在第三或第四象限，则可保证系统内稳定。需要注意的是，当 $|L|$ 在穿越频率附近越陡，则 L 的幅角就越小 (这一论断将在下一节中证明)。如果 L 在过渡频段衰减太快，就可能导致系统不是内稳定的。所以在过渡段，我们要让 L 的曲线尽可能平缓，根据经验可知在此过渡段的斜率不得超过 2。完成上述几步后，需要进一步检验系统是否为内稳定的，以及式 (6.2) 是否成立，如果不成立再反复多次修正。

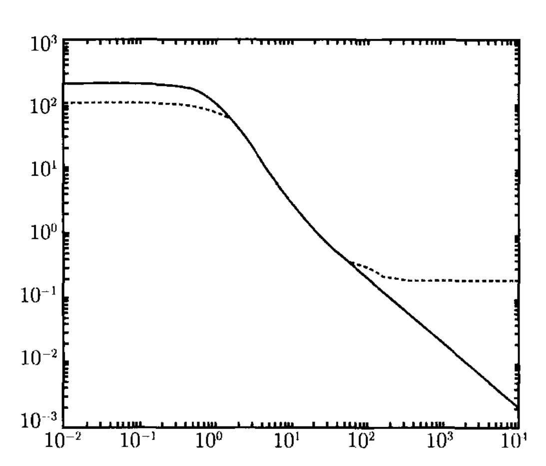


图 6.1　$|L|$ (实线)，$|W_1|/(1-|W_2|)$ (虚线) 和 $(1-|W_1|)/|W_2|$ (点线) 的 Bode 图

6.2　相 位 公 式

如果 L 是稳定的和最小相位的，并且规范化使得 $L(0)>0$，那么它的相位曲线由其 Bode 幅频曲线唯一决定，例如

$$\frac{1}{s+1},\quad \frac{-1}{s+1}$$

都是稳定的和最小相位的。它们有同样的幅频曲线，但有不同的相位曲线。本节的目的就是根据 $|L|$ 来找到 $\arg L$ 的表达式。

假设 L 是正则的，L 和 L^{-1} 在 $\text{Re}\, s\geqslant 0$ 都是解析的，并且 $L(0)>0$。定义 $G\doteq \ln L$，于是有

$$\text{Re}\, G=\ln|L|,\quad \text{Im}\, G=\arg L$$

并且 G 有以下三条性质：

(1) G 在包含虚轴的某个右半平面是解析的。我们对该性质做简要证明，考虑 G 的微分

$$G'=\frac{L'}{L}$$

由于 L 在右半平面解析，所以 L' 在右半平面也是解析的。由于 L 没有零点在右半平面，所以 G' 在所有右半平面的点以及靠近虚轴左边的一些点上都存在。

(2) $\text{Re}\, G(\text{j}\omega)$ 是 ω 的偶函数，$\text{Im}\, G(\text{j}\omega)$ 是 ω 的奇函数。

(3) 当右半平面的半圆的半径 R 趋于 ∞ 时，$s^{-1}G(s)$ 一致趋于 0，即

$$\lim_{R\to\infty}\ \sup_{-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}\left|\frac{G(R\text{e}^{\text{j}\theta})}{R\text{e}^{\text{j}\theta}}\right|=0$$

性质 (3) 的证明 注意到

$$G(Re^{j\theta}) = \ln|L(Re^{j\theta})| + j\arg L(Re^{j\theta})$$

并且当 $R \to \infty$ 时，$\arg L(Re^{j\theta})$ 是有界的。于是有

$$\left|\frac{G(Re^{j\theta})}{Re^{j\theta}}\right| \to \frac{|\ \ln|L(Re^{j\theta})|\ |}{R}$$

注意到 L 是正则的，因而对某些 c 和 $k \geqslant 0$，有

$$L(s) \approx \frac{c}{s^k}, \quad |s| \to \infty$$

于是得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(Re^{j\theta})}{Re^{j\theta}}\right| &\to \frac{|\ \ln|c/R^k|\ |}{R}\\ &= \frac{|\ \ln|c| - k\ln|R|\ |}{R}\\ &\to k\frac{\ln R}{R}\\ &\to 0\end{aligned}$$

□

下面由 G 的实部得到其虚部的表达式。

引理 6.3 对每一个频域 ω_0

$$\text{Im}\ G(j\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\text{Re}\ G(j\omega) - \text{Re}\ G(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2}d\omega$$

证明 定义函数

$$\begin{aligned}F(s) :&= \frac{G(s) - \text{Re}\ G(j\omega_0)}{s - j\omega_0} - \frac{G(s) - \text{Re}\ G(j\omega_0)}{s + j\omega_0}\\ &= 2j\omega_0\frac{G(s) - \text{Re}\ G(j\omega_0)}{s^2 + \omega_0^2}\end{aligned} \tag{6.15}$$

函数 $F(s)$ 除了在极点 $s = \pm j\omega_0$ 以外，在右半平面及虚轴上均解析。

作 Nyquist 围线：由虚轴向上，在点 $\pm j\omega_0$ 处，沿半径为 r 的半圆向右绕过，再沿右半平面半径为 R 的大半圆封闭。根据 Cauchy 定理可知，F 沿这条围绕的积分等于 0。这个积分等于六段积分的和：虚轴上三个区间，两个小半圆和一个大半圆。令 I_1 表示虚轴上三段积分的和，I_2 表示下半部的小半圆的积分，I_3 表示上半部小半圆的积分，I_4 表示大半圆的积分。对于这几段积分，我们将证明下面四条结论。

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0} I_1 = 2\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } G(\text{j}\omega) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} \text{d}\omega \tag{6.16}$$

$$\lim_{r\to 0} I_2 = -\pi \text{Im } G(\text{j}\omega_0) \tag{6.17}$$

$$\lim_{r\to 0} I_3 = -\pi \text{Im } G(\text{j}\omega_0) \tag{6.18}$$

$$\lim_{R\to 0} I_4 = 0 \tag{6.19}$$

首先，$I_1 = \int \text{j}F(\text{j}\omega)\text{d}\omega$，这里积分是在集合

$$[-R, -\omega_0, -r] \cup [-\omega_0 + r, \omega_0 - r] \cup [\omega_0 + r, R] \tag{6.20}$$

上。当 $R \to \infty, r \to 0$ 时，这个集合就成为 $(-\infty, \infty)$。另外，从式 (6.15) 中可以得到

$$\text{j}F(\text{j}\omega) = 2\omega_0 \frac{G(\text{j}\omega) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

又因为

$$\frac{\text{Im } G(\text{j}\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

是奇函数，它在集合式 (6.20) 上的积分等于 0，于是可得式 (6.16)。

其次

$$\begin{aligned} I_2 = &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{Re } G(-\text{j}\omega_0 + r\text{e}^{\text{j}\theta}) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)}{-\text{j}\omega_0 + r\text{e}^{\text{j}\theta} - \text{j}\omega_0} \text{j}r\text{e}^{\text{j}\theta}\text{d}\theta \\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{Re } G(-\text{j}\omega_0 + r\text{e}^{\text{j}\theta}) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)}{-\text{j}\omega_0 + r\text{e}^{\text{j}\theta} + \text{j}\omega_0} \text{j}r\text{e}^{\text{j}\theta}\text{d}\theta \end{aligned}$$

当 $r \to 0$ 时，第一项积分趋于 0，第二项积分趋于

$$[G(-\text{j}\omega_0) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)]\text{j} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{d}\theta = \pi \text{Im } G(\text{j}\omega_0)$$

于是得到式 (6.17) 的证明。式 (6.18) 的证明与之类似。

最后，由于

$$I_4 = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(R\text{e}^{\text{j}\theta})\text{j}R\text{e}^{\text{j}\theta}\text{d}\theta$$

因此

$$|I_4| \leqslant \sup_{-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2} \left| \frac{2\omega_0[G(R\text{e}^{\text{j}\theta}) - \text{Re } G(\text{j}\omega_0)]}{(R\text{e}^{\text{j}\theta})^2 + \omega_0^2} \right| R\pi$$

于是

$$|I_4| \to \sup_{\theta} \frac{\left|G(Re^{j\theta})\right|^2}{R} \to 0$$

进一步得到式 (6.19) 的证明。

最后，由于式 (6.16)~(6.19) 以及 $\mathrm{Re}G(j\omega)$ 是偶函数，可得引理 6.3 的证明。□

根据 L 重写引理 6.3 中的公式如下：

$$\arg L(j\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln|L(j\omega)| - \ln|L(j\omega_0)|}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \tag{6.21}$$

定理 6.1 对每一个频率 ω_0，有

$$\arg L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ \ln|L|}{d\nu} \ln\ \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu$$

其中积分变量为 $\nu = \ln(\omega/\omega_0)$

证明 改变式 (6.21) 中的积分变量得到

$$\arg L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|L| - \ln|L(j\omega_0)|}{\sinh \nu} d\nu$$

需要注意的是，在这个积分中，$\ln|L|$ 实际上看作是 ν 的函数 $\ln|L(j\omega_0 e^{\nu})|$。从 $-\infty$ 到 0 及从 0 到 $+\infty$ 作分部积分得

$$\begin{aligned}\arg L(j\omega_0) = &-\frac{1}{\pi}\left[(\ln|L| - \ln|L(j\omega_0)|) \ln\coth\frac{\nu}{2}\right]_0^{\infty} \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\ \ln|L|}{d\nu} \ln\ \coth\frac{\nu}{2} d\nu \\ &+ \frac{1}{\pi}\left[(\ln|L| - \ln|L(j\omega_0)|) \ln\coth\frac{\nu}{2}\right]_0^{\infty} \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{d\ \ln|L|}{d\nu} \ln\ \coth\frac{-\nu}{2} d\nu\end{aligned}$$

第一项和第三项相加等于 0。于是定理得证。 □

例如，假定 $\ln|L|$ 斜率为常数

$$\frac{d\ \ln|L|}{d\nu} = -c$$

那么

$$\arg L(j\omega_0) = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\ \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu = -\frac{c\pi}{2}$$

即相位转移是 $-90c$ 的常数。

在相位公式中，斜率函数 $\mathrm{d}\ln|L|/\mathrm{d}\nu$ 被函数

$$\ln\ \coth\frac{|\nu|}{2}=\ln\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right|$$

加权。这个函数是关于 ω_0 对称的 (水平坐标取自然对数)，在 $\omega=\omega_0$ 处是正的无穷大，当 ω 从 $-\infty$ 到 ω_0 时是递增的，当 ω 从 ω_0 到 $+\infty$ 时是递减的。$\mathrm{d}\ln|L|/\mathrm{d}\nu$ 在接近 $\omega=\omega_0$ 处加了很大的权。因此可以得出这样的结论：$|L|$ 的曲线在靠近频率 ω_0 处越陡，则 $\arg L$ 越小。

例 6.1　考察一对象的传递函数

$$P(s)=\frac{s+1}{s^2+2\times0.7\times5s+5^2}\frac{s^2+2\times0.05\times30s+30^2}{s^2+2\times0.01\times45s+45^2}$$

这是飞行器运动的模型，它包含 45rad/s 的第一柔性模态。这个模态具有非常小的阻尼比 0.01。与这样的频率和阻尼比相关的不确定性，一般为 $2\%\sim3\%$。P 中还包含一对小阻尼零点。P 的 Bode 幅频图如图 6.2 所示。

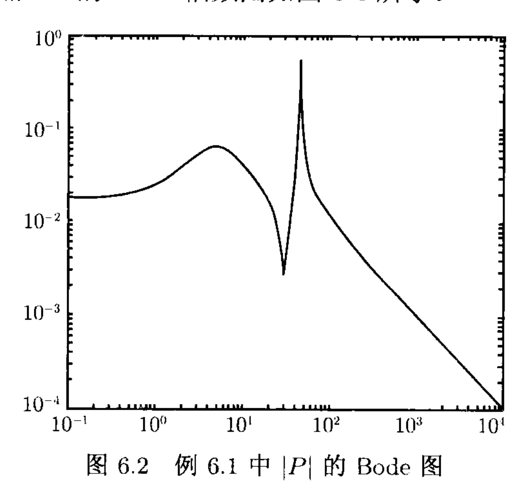


图 6.2　例 6.1 中 $|P|$ 的 Bode 图

一般先不规定性能加权 W_1，而是指定一个希望的开环回路传递函数。最简单又合适的回路传递函数取

$$L(s)=\frac{\omega_c}{s}$$

其中 ω_c 是一正数，即穿越频率 (在该频率处 $|L|=1$)。这就要求 $C=L/P$ 的分子含下面的因子 (即 C 很可能像一个有很深凹形槽的滤波器)。

$$s^2+2\times0.01\times45s+45^2$$

但是，45 和 0.01 这两个数是不确定的，为了更保险起见，可令

$$L(s)=\frac{\omega_c}{s}\frac{s^2+2\times 0.03\times 45s+45^2}{s^2+2\times 0.01\times 45s+45^2}$$

以便让凹槽浅些。

注意到

$$S=\frac{s}{s+\omega_c}$$

原则上，ω_c 越大越好，这样一来 $|S|$ 可在更宽的频域范围内越小 ($|S|$ 越小可保证系统的跟踪性能和抗干扰性能越好)。实际上，由于高频的不确定性，ω_c 的取值也有一定的限制。处理这种不确定性的典型办法是从不确定比较明显的频率开始，保证标称对象 L 充分小。于是，我们选最大的 ω_c 使得

$$|L(j\omega)|\leqslant 0.5,\quad \forall\omega\geqslant 45$$

于是有 $\omega_c\approx 8$。回路的形状如图 6.3 所示，控制器为

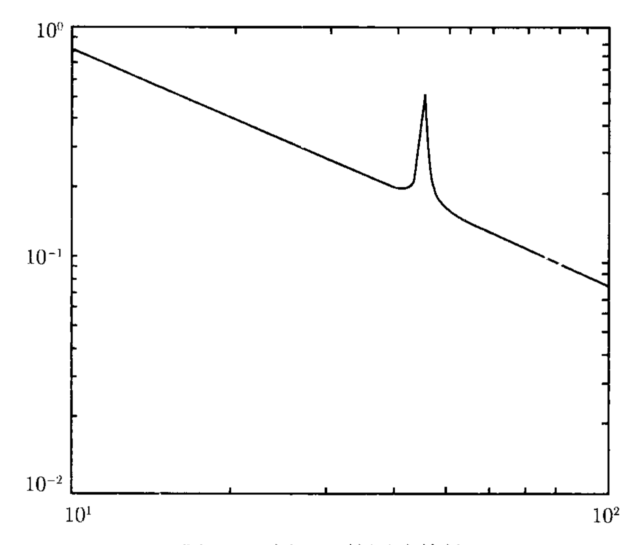


图 6.3　例 6.1 的回路特性

$$\begin{aligned}C(s)&=\frac{L(s)}{P(s)}\\&=8\frac{s^2+2\times 0.7\times 5s+5^2}{s(s+1)}\frac{s^2+2\times 0.03\times 45s+45^2}{s^2+2\times 0.05\times 30s+30^2}\end{aligned}$$

6.3 注　记

本章内容由文献 [1] 的第 7 章改写而成。关于回路成形的更详细内容可参考文献 [1] 和文献 [2] 中的相关内容。

6.4 习　　题

1. 在例 6.1 中，取

$$P(s)=\frac{s+1}{s^2+2\times 0.7\times 5s+5^2}$$

根据回路成形的方法，重新设计一控制器。

参 考 文 献

[1] Doyle J C, 弗朗西斯 B A, 坦嫩鲍姆 A R. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京：清华大学出版社, 1993.

[2] 周克敏, Doyle J C, Glover K. 鲁棒与最优控制. 毛剑琴, 钟宜生, 林岩等译. 北京：国防工业出版社, 2006.

第 7 章 时域数学基础

时域的鲁棒控制理论的数学基础是矩阵分析和 Lyapunov 定理。本章介绍时域鲁棒控制理论的基础知识，包括矩阵范数、稳定性理论、LMI 方法以及一些常用引理等。这些基础知识和基本概念为以后各章节的学习提供理论基础。

7.1 矩阵论基础

7.1.1 矩阵的基本运算

$m \times n$ 个数排成 m 行 n 列的阵列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

称为维数为 $m \times n$ 的矩阵，简称为 $m \times n$ 矩阵，用单个大写字母表示，如 A，B 等。

给定矩阵 A，可以在行间作水平线，或 (及) 在列间作垂直线，把矩阵划分成一些块，称为矩阵 A 的分块。例如，下面的 3×5 的矩阵 A 可以被虚线分成四块：

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

矩阵分块可以显示其结构特征，简化矩阵运算。例如，当 A_{11} 与 A_{22} 都可逆时，有以下的简化矩阵求逆运算：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

和

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

矩阵 P 称为是正定的，如果对于任意的 $x \neq 0$，都有 $x^{\mathrm{T}}Px > 0$ 成立。正定矩阵有如下的几个性质：

(1) 如果 P 的特征值都是正数，则 P 是正定的，记为 $P>0$；

(2) 如果 $P>0$，则 P 的对角线元素都大于 0；

(3) 如果 Q 是非奇异矩阵，且有 $P>0$，则 $Q^{\mathrm{T}}PQ$ 也是正定的；

(4) 如果 $P>0$，则 P^{-1} 存在，且有 $P^{-1}>0$；

(5) 如果 $P>0$，则从 P 中去掉一行及其对应的列所得的矩阵仍然是正定的。

7.1.2 向量和矩阵的范数

定义 7.1 设 x 为属于复空间 $\mathbb{C}^n$ 的复向量，按某一对应规则在 $\mathbb{C}^n$ 上定义 x 的一个实值函数 $\|x\|$。如果该函数满足如下条件：

(1) 非负性，即 $\|x\|\geqslant 0$，$\forall x\in\mathbb{C}^n$，$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) 齐次性，即 $\|kx\|=|k|\cdot\|x\|$，$\forall k\in\mathbb{C}$，$x\in\mathbb{C}^n$；

(3) 三角不等式，即 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$\forall x,y\in\mathbb{C}^n$，

则称实函数 $\|x\|$ 为向量 x 的范数。

记 $\mathbb{C}^n$ 上的复向量 $x=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]^{\mathrm{T}}$。几种常用的向量范数定义如下：

(1) 1- 范数

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \tag{7.5}$$

1- 范数通常记为 $\|x\|_1$。

(2) 2- 范数

$$\|x\|_2=(x^{\mathrm{H}}x)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \tag{7.6}$$

2- 范数通常记为 $\|x\|_2$，又称为 Euclidean 范数。

(3) ∞- 范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \tag{7.7}$$

∞- 范数通常记为 $\|x\|_\infty$。

(4) p- 范数

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \tag{7.8}$$

容易看出，p- 范数中，当 $p=1$ 时，p- 范数即为 1- 范数，当 $p=2$ 时，p- 范数即为 2- 范数，而当 $p\to\infty$ 时，p- 范数为 ∞- 范数。因此，p- 范数具有一般性。

在实际工程问题中，一般讨论的是 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$。这时，上述的几类范数定义依然适用，只是 $x^{\mathrm{H}}=x^{\mathrm{T}}$。

$x\in\mathbb{C}^n$ 的范数定义有无穷多种，对于任意两种范数，有如下的等价性定理。

定理 7.1 设 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的任意两种范数，则存在正数 $k_2 > k_1 > 0$ 满足

$$k_1\|x\|_\beta \leqslant \|x\|_\alpha \leqslant k_2\|x\|_\beta \tag{7.9}$$

定义 7.2 设 A 为属于复矩阵空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的矩阵，按照某一对应规则在 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上定义 A 的一个实值函数 $\|A\|$。如果 $\|A\|$ 满足如下条件：

(1) 非负性，即 $\|A\| \geqslant 0$，$\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$；$\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$；

(2) 齐次性，即 $\|kA\| = |k|\cdot\|A\|$，$\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$k \in \mathbb{C}$；

(3) 三角不等式，即 $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$，$\forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$；

(4) 相容性，即当矩阵乘积 AB 有意义时，有

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\| \tag{7.10}$$

则称 $\|A\|$ 为矩阵 A 的范数。

比较定义 7.1 和 7.2 可知，向量范数和矩阵范数所满足的条件 (1)~(3) 完全相同。实际上，若把 $m\times n$ 的矩阵看成 n 个 m 维的列向量串接而成的 $m\times n$ 维向量，那么上述任何一种向量范数的定义都可以看作 $m\times n$ 维矩阵的范数定义，但是必须验证是否满足矩阵乘法运算的相容性条件。

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$。几种常见的矩阵范数定义如下：

(1) 1- 范数 (又称为列范数)

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{7.11}$$

(2) 2- 范数（又称为谱范数）

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{H}}A)} \tag{7.12}$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值。

(3) ∞- 范数 (又称为行范数)

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{7.13}$$

这三种范数分别为对应向量范数的诱导范数，即

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{7.14}$$

因此都有

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\cdot\|x\|$$

对于 1- 范数，2- 范数，∞- 范数成立。

另外一种常见的矩阵范数是 Frobenius 范数，简称 F 范数，定义为

$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{trace}(A^{\mathrm{T}}A) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \tag{7.15}$$

对于矩阵范数，我们同样有如下的等价性定理。

定理 7.2　设 $\|A\|_\alpha$ 和 $\|A\|_\beta$ 是定义在 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的任意两种矩阵范数，则存在正数 $k_2 > k_1 > 0$ 满足

$$k_1\|A\|_\beta \leqslant \|A\|_\alpha \leqslant k_2\|A\|_\beta \tag{7.16}$$

7.1.3　矩阵的 Kronecker 运算

对于两个矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times q}$，矩阵 A 和 B 的 Kronecker 乘积是一个分块矩阵

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np\times mq} \tag{7.17}$$

利用矩阵的运算，可以得到矩阵的 Kronecker 乘积的一些性质：

(1) $1 \otimes A = A$;

(2) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;

(3) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$

(4) $(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$;

(5) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

(6) $\sigma(A \otimes B) = \{\lambda(A)\lambda(B) : \lambda(A) \in \sigma(A), \lambda(B) \in \sigma(B)\}$,

其中 A，B，C，D 是适当维数的矩阵。很显然，$A \otimes B$ 和 $B \otimes A$ 同阶，但是一般说来，$A \otimes B \neq B \otimes A$。

对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$，定义 A 和 B 的 Kronecker 和定义为

$$A \oplus B = (A \otimes I_m + I_n \otimes B) \tag{7.18}$$

对于矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$，记 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$。令

$$\mathrm{Vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

则称 $\mathrm{Vec}(A)$ 为矩阵 A 的列拉直 (列展开)，同样可以定义矩阵的行展开。

容易得到，对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$X \in \mathbb{R}^{n\times p}$，$B \in \mathbb{R}^{p\times q}$，有下式成立：

$$\mathrm{Vec}(AXB) = (B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(X)$$

如果取 $m = n$，$p = q$，则有 $\mathrm{Vec}(AX + XB) = (B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(\mathrm{X})$。

在控制理论中，我们经常需要求解形如 $AX + XB = C$ 的矩阵方程，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$。这时，可以通过 Kronecker 积写成

$$(B^{\mathrm{T}} \otimes A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$$

注意该方程具有唯一解，当且仅当 $B^{\mathrm{T}} \otimes A$ 是非奇异的。

7.2 Lyapunov 定理及其基本概念

稳定性问题是控制理论和控制系统设计中的一个基本问题，本节以 Lyapunov 函数为工具，讨论系统在平衡点附近的稳定性问题，给出 Lyapunov 理论判断系统稳定性的基本方法。

7.2.1 Lyapunov 稳定性

考虑如下的状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7.19}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，x_0 为 t_0 时刻的初始状态，t 为连续时间变量，f 为光滑函数，同时假设对每个 t_0 和 x_0，系统 (7.19) 有唯一解 $x(t, x_0, t_0)$。当 f 不是 t 的显函数时，称为自治系统或时不变系统，否则称为非自治系统或时变系统。如果 $f(x,t) = A(t)x(t)$，则系统 (7.19) 为线性系统，否则称为非线性系统。如果 $f(x,t) = Ax(t)$，则系统 (7.19) 为定常线性系统。

定义 7.3 $x_e = 0$ 是系统 (7.19) 的平衡点，如果

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{7.20}$$

对于非线性系统，可能有一个或多个平衡点，它们分别对应于方程 (7.20) 的一个或多个常数解。对于线性定常系统，其平衡点 x_e 满足

$$Ax_e = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{7.21}$$

当矩阵 A 非奇异时，系统只有唯一的平衡点 $x_e = 0$；当 A 奇异时，存在无限多个平衡点。如果平衡点是孤立的，则称为孤立平衡点。

如果系统 (7.19) 的平衡点 $x_e \neq 0$，可以定义一个新的状态向量 $e = x - x_e$。因为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_e = f(x_e + e, t) - f(x_e, t) = g(e, t)$$

可以通过研究系统 $\dot{e}=g(e,t)$ 在零点的稳定性来研究 $\dot{x}=f(x,t)$ 在 x_e 的稳定性。因此，不失一般性，总是假设系统 (7.19) 的平衡点在 $x_e=0$。

如果系统初始状态处于平衡状态且没有外力作用在系统上，系统将永远处于平衡状态，但是，如果系统受到干扰，系统轨迹可能依然处于平衡状态或者距离平衡状态越来越远。因此，所谓的系统运动的稳定性，就是研究平衡状态的稳定性，即偏离平衡状态的受扰运动能否只通过依靠系统内部的结构因素而返回平衡状态，或者限制在它的一个有限邻域内。

定义 7.4　系统 (7.19) 的平衡点 $x_e=0$ 是稳定的，如果对于任意给定的实数 ε，存在一个与 ε 和 t_0 有关的实数 $\delta(\varepsilon,t_0)$，只要 x_0 满足

$$\|x_0\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0)$$

就有

$$\|x(t,x_0,t_0)\|\leqslant\varepsilon,\quad\forall t>0$$

否则称系统在平衡点是不稳定的。

定义7.4给出了 Lyapunov 意义上的系统稳定性，但许多场合仅仅讨论 $x(t,x_0,t_0)$ 的有界性远远不够，更需要考虑给定初始扰动下 $x(t,x_0,t_0)$ 能否返回平衡点。

定义 7.5　系统 (7.19) 的平衡点 $x_e=0$ 是渐近稳定的，如果平衡状态 $x_e=0$ 不仅是 Lyapunov 稳定的，还存在一个实数 $\delta(t_0)>0$ 使得

$$\|x_0\|\leqslant\delta(t_0)\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0,t_0)\|=0$$

则称系统是渐近稳定的。也就是说，以足够靠近平衡状态 x_e 出发的点，当 $t\to\infty$ 时收敛于 x_e。

可以看出，稳定性和渐近稳定性都具有局部性。在这个意义上，如果初始扰动 $\delta(\varepsilon,t_0)$ 很大，则状态 $x(t,x_0,t_0)$ 可能偏离 $x_e=0$ 越来越远。因此存在一个区域 $D_\delta=\{x_0:\|x_0\|\leqslant\delta\}$，任意初始于该邻域的初始状态都能确保稳定和渐近稳定。该区域称为吸引域。如果 $D_\delta=\mathbb{R}^n$，称系统在 $x_e=0$ 是全局渐近稳定的，即如下定义。

定义 7.6　系统 (7.19) 的平衡点 $x_e=0$ 是渐近稳定的，如果 $x_e=0$ 对所有 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 都是稳定的，同时还满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t,x_0,t_0)\|=0$。

在许多控制系统中，不仅需要考虑轨迹的稳定性，更关心轨迹收敛的性能，例如，我们希望系统 (7.19) 的轨迹以指数方式收敛到 $x_0=0$，这时就有指数稳定的概念。

定义 7.7 系统 (7.19) 的平衡点 $x_e=0$ 是指数稳定的，如果存在两个正数 α 和 λ，在 $\|x_0\|\leqslant\varepsilon$ 时系统轨迹满足

$$\|x(t,x_0,t_0)\|\leqslant\alpha\|x_0\|\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad \forall t\in\mathbb{R}^+$$

7.2.2 Lyapunov 稳定性定理

1894 年，俄国学者 Lyapunov 在《运动稳定性的一般问题》论文中，首次建立了运动稳定性的一般理论，给出了判断形如 (7.19) 的非线性系统稳定性的一般方法。Lyapunov 构造了一个类似于 "能量" 的 Lyapunov 函数，通过分析它及其一阶导数的定号性来获得系统稳定性的有关信息。该方法具有概念直观、方法具有一般性、物理意义清晰等优点，当 1960 年前后被引入到系统与控制论中，立刻得到了广泛应用，无论在理论上还是在应用上都显示了强大的优越性。本节分别针对连续系统和离散系统，给出相应的 Lyappunov 稳定性判据。

定理 7.3 对于系统 (7.19)，如果存在一个正定函数 $V(x,t)$ 满足 $\dot V(x,t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x,t)$ 是半负定的，则平衡状态 $x_e=0$ 是稳定的。如果 $\dot V(x,t)$ 是负定函数，同时对于所有的系统非零解，$\dot V(x,t)\neq 0$，则平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的。如果 $x_e=0$ 是渐近稳定的，且当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $V(x,t)\to\infty$，则 $x_e=0$ 是全局渐近稳定的。

对于离散系统，有如下的类似定理。

定理 7.4 对于系统

$$\begin{aligned}&x(k+1)=f(x(k),k)\\&f(0,t)=0,\quad \forall k>0\end{aligned}\tag{7.22}$$

如果存在一个正定函数 $V(x,k)$ 满足 $\Delta V(x,k):=V(x(k+1),k)-V(x(k),k)<0$，$\forall k$，$\forall x\neq 0$，则平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的。如果 $x_e=0$ 是渐近稳定的，且当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $V(x,k)\to\infty$，则 $x_e=0$ 是全局渐近稳定的。

7.3 时滞系统的稳定性定理

时滞现象存在于科学研究与工程技术的众多领域，如长管道进料或皮带传输，极缓慢的过程或者复杂的在线分析仪等都会产生时滞，对许多大时间常数的系统，也常用适当的小时间常数系统加时滞环节来近似，这些都可以归结为时滞模型，一般描述为

$$\begin{aligned}&\dot x(t)=f(x,x_t),\\&x(t)=\varphi(t),\quad t\in[t_0-\tau,t_0]\end{aligned}\tag{7.23}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量；$f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ 为光滑函数；$x_t = x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]$；$\varphi(t)$ 为初始状态。可以看出，要确定状态向量在 t 时刻的值，必须知道时间 t 和 $x(\xi)$，$\xi \in [t-\tau, t]$。因此，从本质上说，时滞系统是无穷维系统。

如果存在时间 $\eta > 0$，$x(t, t_0, \varphi)$ 在区间 $[t_0 - \tau, t_0 + \eta]$ 上连续且满足方程 (7.23)，则称函数 $x(t, t_0, \varphi)$ 是方程 (7.23) 在区间 $[t_0 - \tau, t_0 + \eta]$ 的一个解。显然，$x = \varphi(t)$，$t \in [t_0 - \tau, t_0]$。以下定理给出了方程 (7.23) 解存在且唯一的条件。

定理 7.5 假定 $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 为开集，函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为连续函数，且 $f(t, \varphi)$ 在 Ω 的每一个紧子集上对 φ 都满足 Lipschizt 条件，即对一给定的紧子集 $\Omega_0 \subset \Omega$，存在一个常数 L 使得

$$\|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)\| \leqslant L\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

对于任意的 $(t, \varphi_1) \in \Omega_0$ 和 $(t, \varphi_2) \in \Omega_0$ 都成立。如果 $(t, \varphi) \in \Omega$，则方程的解是唯一的。

对于函数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$，定义 $\|\varphi\|_c$ 为

$$\|\varphi\|_c = \max_{a \leqslant \theta \leqslant b} \|\varphi(\theta)\| \tag{7.24}$$

其中 $\|\cdot\|$ 取 2- 范数，在基础上给出时滞系统稳定性定义如下。

定义 7.8 如果对于任意给定的 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$，使得当 $\|x_{t_0}\| < \delta$ 时，有 $\|x(t)\| < \varepsilon$ 对 $t \geqslant 0$ 成立，则称系统 (7.23) 的零解是稳定的。如果系统 (7.23) 的零解是稳定的，且对于任意的 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon) > 0$ 使得 $\|x_{t_0}\| < \delta_a$ 时有 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$，则称系统 (7.23) 的零解是渐近稳定的。如果系统 (7.23) 的零解是稳定的，且 $\delta(t_0, \varepsilon)$ 的选取不依赖于 t_0，则称系统 (7.23) 的零解是一致稳定的。如果系统 (7.23) 的零解是一致稳定的，且存在 $\delta_1 > 0$ 使得对于任意的 $\eta > 0$，存在 $T = T(\delta_a, \eta)$ 使得 $\|x_{t_0}\| < \delta$ 时，有 $\|x(t)\| < \eta$ 对任意的 $t \geqslant t_0 + T$，$t_0 \in \mathbb{R}$ 成立，则系统 (7.23) 的零解是一致渐近稳定的。如果系统 (7.23) 的零解是（一致）渐近稳定的，且 δ_a 可以为任意大的有限数，则称系统 (7.23) 的零解是（一致）全局渐近稳定的。

同无时滞系统一样，判定时滞系统稳定性的有效办法是 Lyapunov 方法。由于时滞系统 (7.23) 在 t 时刻的状态由区间 $[t - \tau, t]$ 的 $x(t)$ 的值来描述，因此对应的 Lyapunov 函数也应该是依赖于 x_t 的泛函 $V(t, x_t)$。该函数称为 Lyapunov-Krasovskii 泛函，其中 x_t 为系统 (7.23) 的解。定义泛函的上右导数为

$$\dot{V}(t, \varphi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{V(t+h, x_{t+h}(t, \varphi)) - V(t, \varphi)}{h}$$

定理 7.6 设系统 (7.23) 中的 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R} \times$ ($\mathbb{C}$的有界子集) 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集的映射，$u, v, w : \bar{R}_+ \to \bar{R}_+$ 为连续的非减函数，当 $s > 0$ 时 $u(s)$ 和 $v(s)$

为正，且 $u(0) = v(0) = 0$。若存在连续可微泛函 $V : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 使得

$$u(\|\varphi(0)\|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant v(\|\varphi\|_c)$$

并且

$$\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -w(\|\varphi(0)\|)$$

则系统 (7.23) 的零解是一致稳定的；如果 $s > 0$ 时 $w(s) > 0$ 则系统 (7.23) 的零解是一致渐近稳定的；如果 $\lim\limits_{s \to \infty} u(s) = \infty$则系统 (7.23) 的零解是全局一致渐近稳定的。

由于 Lyapunov-Krasovskii 泛函要用到区间 $[t - \tau, t]$ 上的状态 $x(t)$，造成了 Lyapunov-Krasovskii 实际应用的困难，而以下的 Razumikhin 定理只用到了函数而非泛函，在许多场合可以代替 Krasovskii 定理。

定理 7.7 设系统 (7.23) 中的 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R} \times$ ($\mathbb{C}$的有界子集) 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集的映射，$u, v, w : \bar{R}_+ \to \bar{R}_+$ 为连续的非减函数，当 $s > 0$ 时 $u(s)$ 和 $v(s)$ 为正，且 $u(0) = v(0) = 0$，v 严格递增。若存在连续可微泛函 $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得

$$u(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant v(\|x\|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

并且 V 沿系统 (7.23) 的解 $x(t)$ 的导数满足当 $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leqslant V(x, x(t))$ 时

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -w(\|x\|), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

则系统 (7.23) 一致稳定。

如果当 $s > 0$ 时 $w(s) > 0$，并存在一个连续非减函数 $p(s) > s, (s > 0)$，使得若 $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leqslant p(V(t, x(t)))$，

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -w(\|x\|), \quad \theta \in [-\tau, 0]$$

成立，则系统 (7.23) 一致渐近稳定。如果还有 $\lim\limits_{s \to \infty} u(s) = \infty$，则系统 (7.23) 全局一致渐近稳定。

7.4 Riccati 方程

所谓代数 Riccati 方程，是指具有如下形式的矩阵方程：

$$A^{\mathrm{T}} P + PA + PRP - Q = 0 \tag{7.25}$$

其中 $P, A, R, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$，且 Q 为对称矩阵，R 为半正定或半负定矩阵。如存在 P 满足式 (7.25)，则称该 Riccati 方程有解。显然，当 $R = 0$ 时，Riccati 方程退化为

Lyapunov 方程。大量的控制问题都可以归结为 Riccati 方程的求解问题。例如, LQ 问题中经常碰到如下的二次矩阵不等式:

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0$$

其中 A, B 为适当维数的定常矩阵, Q 为给定的适当维数的对称矩阵, P 为对称矩阵变量。

对于 Riccati 方程 (7.25), 定义 $2n \times 2n$ 矩阵 H 如下:

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

该矩阵通常称为 Riccati 方程 (7.25) 的 Hamiltonian 矩阵, 它与 Riccati 方程有如下关系:

$$[P \quad -I]\, H \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0 \tag{7.27}$$

定理 7.8　Hamiltonian 矩阵 H 的特征值关于原点是对称分布的, 即, 若 λ 是 H 的一个特征值, 则 $-\lambda$, λ^*, $-\lambda^*$ 也是 H 的特征值。

设定 λ_i, $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 为 H 的 n 个特征值, 且 v_i 是对应的特征值 (如 λ_i 中有重复的特征值, 则 v_i 为对应的广义特征向量), 记 H 的 Jordan 标准型为 J, 并定义 $2n \times n$ 的矩阵 T 为

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

则有

$$HT = TJ$$

令 $n \times n$ 维矩阵 T_1 和 T_2 为

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

则有

$$P = T_2 T_1^{-1} \tag{7.28}$$

例如, 假设 Riccati 方程 (7.25) 中矩阵取为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其 Hamiltonian 矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算得矩阵 H 的特征值为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 2$，$\lambda_4 = -2$，与之对应的特征向量为

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以选取 $\lambda_2 = -1$，$\lambda_2 = -2$ 对应的特征向量 v_2 和 v_4，则 T 及 T_1，T_2 分别为

$$T = [\, v_2 \quad v_4 \,] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而

$$P = T_2 T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.5 LMI 方法

近十多年来，线性矩阵不等式 (LMI) 越来越广泛应用于解决系统与控制中的一些问题，特别是随着求解 LMI 的内点法的提出和 MATLAB LMI 工具箱的推出，LMI 越来越受到人们的关注和重视，并逐渐成为这一研究领域的研究热点。

7.5.1 LMI 的一般表示

一个 LMI 具有以下形式：

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i < 0 \tag{7.29}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为 m 个实数变量，称为 LMI (7.29) 的决策变量，而 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为决策向量，$F_i = F_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, (i = 0, 1, \cdots, n)$ 为给定的对称矩阵。$F(x) < 0$ 表示矩阵 $F(x)$ 是负定的，即对于任意非零向量 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 有不等式 $\xi^{\mathrm{T}} F(x) \xi < 0$ 成立。LMI 的求解问题就是要找到一组决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使得 (7.29)
成立。

若式 (7.30) 成立

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \leqslant 0 \tag{7.30}$$

则称之为非严格 LMI。

在许多控制系统中，问题的变量是以矩阵形式给出，如矩阵不等式

$$F(X) = A^{\mathrm{T}}X + XA + Q < 0 \tag{7.31}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为给定的常数矩阵，其中 Q 为对称正定的，$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为未知矩阵变量。如果假设 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 为对称矩阵空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$m = \dfrac{n(n+1)}{2}$，则对任意对称矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$，存在标量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使得 $X = \sum_{i=1}^{m} x_i E_i$。因此

$$\begin{aligned} F(X) =& F\left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right) = A^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i E_i\right)A + Q \\ &= x_1(A^{\mathrm{T}}E_1 + E_1A^{\mathrm{T}}) + \cdots + x_m(A^{\mathrm{T}}E_m + E_mA) + Q \\ &< 0 \end{aligned}$$

即可以写成 LMI 的一般形式。

定理 7.9　集合 $\Phi = \{x : F(x) < 0\}$ 是一个凸集。

该定理说明了约束条件 (7.29) 定义了自变量空间的一个凸集，因此是自变量的一个凸约束。正是 LMI 的这个性质使得可以应用解决凸优化问题的有效方法来求解相关的 LMI 问题。

在控制论中经常遇到的二次矩阵不等式，可以通过下面的 Schur 补引理转化为 LMI，这也是 LMI 在系统与控制论中得以广泛应用的一个主要原因。

定理 7.10　给定对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $S_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$，则以下三个条件是等价的：

(1) $S < 0$；

(2) $S_{11} < 0$，$S_{22} - S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$；

(3) $S_{22} < 0$，$S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}} < 0$。

证明　(1) $\Leftrightarrow$ (2) 由于 S 是对称的，故有 $S_{11} = S_{11}^{\mathrm{T}}$，$S_{22} = S_{22}^{\mathrm{T}}$，$S_{21} = S_{12}^{\mathrm{T}}$。应用矩阵的块运算，可以得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} \end{bmatrix}$$

因此有

$$S<0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow (2)$$

(1) ⇔ (3)，注意到

$$\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

因此有

$$S<0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow (3)$$

□

通过 Schur 补引理，可以将非线性矩阵不等式，特别是 Riccati 矩阵方程转换成 LMI，例如，不等式

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q<0$$

其中 A，B 为适当维数的定常矩阵，Q 为适当维数的对称矩阵，P 为对称矩阵变量，R 为正定对称矩阵应用 Schur 补引理可以将之转化为如下的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+Q & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -R \end{bmatrix} < 0$$

在许多问题中，经常会遇到非严格 LMI，或既包含严格 LMI，又包含非严格 LMI 的混合 LMI。对于矩阵

$$F=\begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$C\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$F\geqslant 0$ 等价于

$$C\geqslant 0,\quad A-B^{\mathrm{T}}C^{-1}B\geqslant 0,\quad B^{\mathrm{T}}(I-CC^{-1})=0 \tag{7.33}$$

其中 C^{-1} 为矩阵 C 的 Moore-Penrose 逆。

7.5.2 LMI 标准问题

本节介绍三类标准的 LMI 问题。MATLAB 的 LMI Toolbox 提供了这三类标准问题的求解器。假定 F, G, H 是对称的矩阵仿射函数，c 是一个给定的常数向量。

(1) 可行性问题 (LMIP)：给定 LMI $F(x) < 0$，检验是否存在 x 使得 $F(x) < 0$ 成立。如果存在这样的 x，则称该 LMI 可行，否则该 LMI 不可行。

(2) 特征值问题 (EVP)：在一个 LMI 约束下，求解矩阵 $G(x)$ 的最大特征值的最小化问题或确定问题是否有解。它的一般形式为

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s.t. } G(x) < \lambda I \\ &\quad\quad H(x) < 0 \end{aligned}$$

这个问题也可以转化为如下的一个等价问题：

$$\begin{aligned} &\min c^{\mathrm{T}} x \\ &\text{s.t. } F(x) < 0 \end{aligned}$$

这是 LMI Toolbox 特征值问题求解器所处理问题的标准形式。

(3) 广义特征值问题 (GEVP)：在一个 LMI 约束下，求两个仿射矩阵函数的最大广义特征值的最小化问题。

给定矩阵 G 和 F，对标量 λ，如果存在非零向量 y，使得 $Gy = \lambda Fy$，则 λ 为矩阵 G 和 F 的广义特征值。很显然，当 $F = I$ 时，广义特征值退化为普通的矩阵特征值问题。

如果矩阵 F 是正定的，对充分大的标量 λ 一定有 $G - \lambda F < 0$。随着 λ 的减小，在某个适当的值，$G - \lambda F$ 将变得奇异。因此存在非零向量 y 使得 $Gy = \lambda Fy$。这样的一个 λ 就是矩阵 G 和 H 的广义特征值。因此，矩阵 G 和 F 的最大广义特征值可以通过求解以下的优化问题得到：

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s.t. } G - \lambda F < 0 \end{aligned}$$

当矩阵 G 和 F 是 x 的一个仿射函数时，在 LMI 约束下，求矩阵函数 $G(x)$ 和 $F(x)$ 的最大广义特征值的最小化问题的一般形式为

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s.t. } G < \lambda F(x) \\ &\quad\quad F(x) > 0 \\ &\quad\quad H(x) < 0 \end{aligned}$$

7.5.3 LMI 的基础结论

本节给出一些鲁棒控制常用的 LMI 基本结论。

定理 7.11 设 P，Q，H 是给定的适当维数的矩阵，且 H 是对称的，N_P 和 N_Q 分别是由核空间 $\ker(P)$ 和 $\ker(Q)$ 的任意一组基向量作为列向量构成的矩阵，则存在矩阵 X 使得

$$H + P^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}Q + Q^{\mathrm{T}}XP < 0$$

当且仅当

$$N_P^{\mathrm{T}}HN_P < 0, \quad N_Q^{\mathrm{T}}HN_Q < 0$$

通过引入核空间，定理 7.11 消去了变量 X，但并未引入额外的保守性。

在鲁棒控制中，经常用到如下的 S-procedure 来将非凸约束问题转化成 LMI 约束。

定理 7.12 对 $k = 1, 2, \cdots, N$，设 $\sigma_k : V \to R$ 是定义在线性向量空间 V 上的实值泛函，以下两条件等价：

(1) 对使得 $\sigma_k(y) \geqslant 0$，$k = 1, 2, \cdots, N$ 的所有 $y \in V$，有 $\sigma_0(y) \geqslant 0$；

(2) 存在标量 $\tau_k \geqslant 0$，$k = 1, 2, \cdots, N$，使得对任意的 $y \in V$ 有

$$\sigma_0(y) - \sum_{k=1}^{N} \tau_k \sigma_k(y) \geqslant 0$$

例如，存在 $P > 0$ 对满足 $\xi^{\mathrm{T}}\xi \leqslant \eta C^{\mathrm{T}}C\eta$ 的所有 ξ 和 η，

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} < 0$$

成立的充分必要条件是存在一标量 $\tau > 0$ 和矩阵 $P > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + \tau C^{\mathrm{T}}C & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\tau I \end{bmatrix} < 0$$

显然，这是一个关于矩阵 P 和标量 τ 的 LMI。

定理 7.13 设 $x \in \mathbb{R}^p$，$y \in \mathbb{R}^q$，D 和 E 是适当维数的常数矩阵，则对任意满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的适当维数矩阵 F，有

$$2x^{\mathrm{T}}DFEy \leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}x + \frac{1}{\varepsilon}y^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Ey$$

证明 从

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left(\sqrt{\varepsilon}D^{\mathrm{T}}x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}FEy\right)^{\mathrm{T}}\left(\sqrt{\varepsilon}D^{\mathrm{T}}x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}FEy\right) \\ &= \varepsilon x^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}x - 2x^{\mathrm{T}}DFEy + \frac{1}{\varepsilon}y^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FEy \\ &\leqslant \varepsilon xDD^{\mathrm{T}}x - 2x^{\mathrm{T}}DFEy + \frac{1}{\varepsilon}y^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Ey \end{aligned}$$

由 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$，整理可得定理。 □

定理 7.14　对任意给定向量 $x \in \mathbb{R}^p$，$y \in \mathbb{R}^q$，

$$\max\left\{(x^{\mathrm{T}}Fy)^2 : F \in \mathbb{R}^{p\times q}, F^{\mathrm{T}}F \leqslant I\right\} = (x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

证明　根据 Schwarz 不等式可知

$$|x^{\mathrm{T}}Fy| \leqslant \sqrt{(x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}Fy)}$$

因此有

$$(x^{\mathrm{T}}Fy)^2 \leqslant (x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}Fy) \leqslant (x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

另一方面，如果取

$$\tilde{F} = \frac{xy^{\mathrm{T}}}{\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}\sqrt{y^{\mathrm{T}}y}}$$

则得

$$x^{\mathrm{T}}\tilde{F}y = \frac{x^{\mathrm{T}}xy^{\mathrm{T}}y}{\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}\sqrt{y^{\mathrm{T}}y}} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}\sqrt{y^{\mathrm{T}}y}$$

即 $(x^{\mathrm{T}}Fy)^2$ 在 $\tilde{F}$ 处得到上界值 $(x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$。定理得证。 □

从证明过程可以看出，所构造的 $\tilde{F}$ 满足 $\tilde{F}^{\mathrm{T}}\tilde{F} = I$，因此定理 7.14 可进一步简化为

$$\max\left\{(x^{\mathrm{T}}Fy)^2 : F \in \mathbb{R}^{p\times q}, F^{\mathrm{T}}F = I\right\} = (x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

定理 7.15　设 X，Y 和 Z 是任意的给定对称矩阵，满足 $X \geqslant 0$，且

(1) 对任意非零向量 $x, x^{\mathrm{T}}Yx < 0$;

(2) $\delta(x) = (x^{\mathrm{T}}Yx)^2 - 4(x^{\mathrm{T}}Xx)(x^{\mathrm{T}}Zx) > 0$，

则存在常数 $\lambda < 0$ 使得

$$M(\lambda) = \lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0$$

定理 7.16　设 X，Y 和 Z 是任意的给定矩阵，满足 $X > 0$，且

(1) 对任意使得 $x^{\mathrm{T}}Zx \geqslant 0$ 的非零向量 x，$x^{\mathrm{T}}Yx < 0$;

(2) 对任意非零向量 x，$\delta(x) = (x^{\mathrm{T}}Yx)^2 - 4(x^{\mathrm{T}}Xx)(x^{\mathrm{T}}Zx) > 0$，

则存在常数 $\lambda < 0$ 使得

$$M(\lambda) = \lambda^2 X + \lambda Y + Z \leqslant 0$$

在时滞系统研究中，经常用到以下的放大不等式对交叉项放大来获取交叉项的上界:

$$-2a^{\mathrm{T}}b \leqslant a^{\mathrm{T}}Xa + b^{\mathrm{T}}X^{-1}b$$

其中 X 为对称正定矩阵。如果 $X = I$，有 $-2a^{\mathrm{T}}b \leqslant a^{\mathrm{T}}a + b^{\mathrm{T}}b$。

对于适当维数的矩阵 M 和对称正定矩阵 X，有

$$-2(a + Mb)^{\mathrm{T}}b \leqslant (a + Mb)^{\mathrm{T}}X(a + Mb) + b^{\mathrm{T}}X^{-1}b$$

整理得到如下定理。

定理 7.17 对任意适当维数的向量 a，b，对称正定矩阵 X 和矩阵 M，以下不等式成立：

$$-2a^{\mathrm{T}}b \leqslant \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & XM \\ M^{\mathrm{T}}X & (M^{\mathrm{T}}X + I)X^{-1}(XM + I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

该不等式一般称为 Park 不等式。

定理 7.18 对任意适当维数的向量 a, b 和矩阵 N，X，Y，Z，若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \geqslant 0$，则以下不等式成立：

$$-2a^{\mathrm{T}}Nb \leqslant \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^{\mathrm{T}} - N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

证明 由定理条件可得

$$\begin{aligned} -2a^{\mathrm{T}}Nb &\leqslant \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &\leqslant \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &\leqslant \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^{\mathrm{T}} - N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

该不等式一般称为 Moon 不等式。可以看出，如果 $N = Y = I$，$Z = X^{-1}$，则有 $-2a^{\mathrm{T}}b \leqslant a^{\mathrm{T}}Xa + b^{\mathrm{T}}X^{-1}b$。当取 $N = I$，$Y = I + XM$，$Z = (M^{\mathrm{T}}X + I)X^{-1}(XM + I)$ 时，可得 Park 不等式。由此可知，Moon 不等式具有更小的保守性。

7.6 不确定系统模型

在鲁棒控制理论中，不确定动态系统的概念非常重要。为了有效地控制系统设计，一个复杂的动态系统必须用相对简单的模型来表述，而简化模型与实际对象模型之间的差距成为模型不确定性。本节介绍常用的不确定模型。

讨论如下的不确定系统：

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) \tag{7.34}$$

其中 $x(t)$ 为状态向量，A 为已知矩阵，$\Delta A(t)$ 为未知矩阵，表示系统的不确定性。ΔA 一般有以下几种形式。

1) 秩 1 分解型

$$\Delta A(t) = \alpha_1(t)h_1^{\mathrm{T}}g_1 + \alpha_2(t)h_2^{\mathrm{T}}g_2 + \cdots + \alpha_m(t)h_m^{\mathrm{T}}g_m$$

其中 h_i，g_i，$(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是确定的且具有适当维数的一维实向量，$\alpha_i(t)$ 是具有 Lebesgue 可测元的有界实标量函数，且满足

$$|\alpha_i(t)| \leqslant \sigma_i, \quad \sigma_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 σ_i，$(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为确定标量。

2) 线性不确定模型

$$\Delta A(t) = \alpha_1(t)A_1 + \alpha_2(t)A_2 + \cdots + \alpha_m(t)A_m$$

其中 A_i, $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是已知的实矩阵，$\alpha_i(t)$ 为有界的 Lebesgue 可测的实标量函数，且满足

$$|\alpha_i(t)| \leqslant \sigma_i, \quad \sigma_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 σ_i，$(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为已知的标量，为了研究方便，有些文献中不仅对 σ_i 的幅值加以约束，还对其变化率有所限制，即

$$|\dot{\alpha}_i(t)| \leqslant \theta_i < 1, \quad \theta_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 θ_i，$(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为确定的标量。

3) 范数有界不确定模型

$$\|\Delta A(t)\| \leqslant \alpha$$

其中 α 为一给定标量。目前，经常使用如下更广泛的形式：

$$\Delta A(t) = DF(t)E$$

其中 D 和 E 为具有适当维数的实常数矩阵，描述不确定性进入标称系统的方式，$F(t)$ 为有界的实矩阵函数，其元素是 Lebesgue 可测的，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$$

不同的不确定性表达形式之间可以互相转化，但一般来说，这种转换并不是充分必要的。例如，线性不确定模型就可以转化为范数有界不确定模型，其中

$$D = [\,\alpha_1 A_1 \quad \alpha_2 A_2 \quad \cdots \quad \alpha_m A_m\,]$$

$$F(t) = \mathrm{diag}\left\{\frac{\alpha_1(t)}{\sigma_1}I, \frac{\alpha_2(t)}{\sigma_2}I, \cdots, \frac{\alpha_m(t)}{\sigma_m}I\right\}$$

$$E = [\,I \quad I \quad \cdots \quad I\,]$$

很显然 $F(t)$ 满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$，但前者仅仅是后者的一个子集，这种转换带有一定的保守性。

要特别指出的是，对于范数有界不确定性，如果 $F_1(t)$ 满足 $F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1^{\mathrm{T}}(t) \leqslant I$，$F_2(t)$ 满足 $F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2^{\mathrm{T}}(t) \leqslant I$，则对任意的 $F(t) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$，$\alpha_1 \geqslant 0$，$\alpha_2 \geqslant 0$，$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$，有

$$
\begin{aligned}
F^{\mathrm{T}}(t)F(t) &= (\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t))^{\mathrm{T}}(\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)) \\
&= \alpha_1^2 F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) + \alpha_2^2 F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t) + \alpha_1\alpha_2(F_1^{\mathrm{T}}(t)F_2(t) + F_2^{\mathrm{T}}(t)F_1(t)) \\
&\leqslant \alpha_1^2 F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) + \alpha_2^2 F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t) + \alpha_1\alpha_2(F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) + F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t)) \\
&\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t) \\
&= \alpha_1 F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) + \alpha_2 F_2^{\mathrm{T}}(t)F_2(t) \\
&\leqslant (\alpha_1 + \alpha_2)I \\
&= I
\end{aligned}
$$

因此，由 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 描述的不确定参数集合是一个凸集，同时，由 $(-F^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}(-F(t)) \leqslant I$ 可知，容许的不确定参数对于原点是对称的。但对很多系统来说，不确定参数并不一定刚好满足以上两个特征，如果把不确定参数嵌入到 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 这样一个集合中必然会带来保守性。

范数有界不确定有时考虑以下更具有普遍意义的线性分式模型：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t) \\
q(t) &= Cx(t) + D\omega(t) \\
\omega(t) &= \Delta(t)q(t)
\end{aligned}
$$

其中 A，B，C，D 为已知的定常矩阵，$\Delta(t)$ 为未知矩阵且满足范数有界条件 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I$。该模型可以进一步写成如下形式：

$$
\dot{x}(t) = (A + B\Delta(I - D\Delta)^{-1}C)x(t)
$$

显然，如果 $D = 0$，线性分式模型退化为一般的范数有界不确定性系统。

时域方法的另外一种途径是直接研究以下方程的鲁棒稳定性：

$$
\dot{x}(t) = A(t)x(t)
$$

其中 $A(t)$ 为时变未知不确定参数，通常假定 $A(t)$ 为如下两种形式。

(1) 凸多面体不确定性

$$
A(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)A_i
$$

其中 A_i，$(i=1,2,\cdots,m)$ 为已知的实矩阵，确定了凸多面体的各个顶点，$\alpha_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$ 为有界的实标量函数，且满足

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)=1,\ \alpha_i(t)\geqslant 0$$

(2) 仿射参数模型

$$A(t)=A_0+p_1A_1+p_2A_2+\cdots+p_mA_m$$

其中 $A_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为已知的常数矩阵，$p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为未知变量。

7.7 注　　记

本章内容由文献 [1] 的第 2 章，文献 [2] 的第 1 章，文献 [3] 的第 1 章，以及文献 [4] 的第 2 章，文献 [5] 的第 2 章，文献 [6] 的第 2 章等内容改写。

7.8 习　　题

1. 证明对于矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 有下式成立：

$$\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sigma_{\max}(A)$$

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ax\|_2=\inf_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sigma_{\min}(A)$$

2. 在 μ 分析中常要确定一个对角矩阵 D 使得 $\|DED^{-1}\|<1$，其中 E 是一个给定的矩阵的常数矩阵。试将矩阵 D 的存在性问题等价转换为 LMI 的可行性问题。

3. 利用 Kronecker 积的性质证明：Lyapunov 方程

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$$

有唯一解的充分必要条件是

$$\lambda_i+\lambda_j\neq 0$$

其中 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 A 的特征值，Q 为对称正定矩阵。

4. 用求解 Hamiltonian 矩阵的方法求解 Riccati 方程 (7.25) 的解，其中

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

5. 在鲁棒控制中，常讨论如下的区间系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，且存在矩阵 $A_m = (a_{ij}^m)_{n\times n}$ 和 $A_M = (a_{ij}^M)_{n\times n}$，对于 $1 \leqslant i,j \leqslant n$ 满足 $a_{ij}^m \leqslant a_{ij}^M$ 使得

$$a_{ij}^m \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^m, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

试将该区间矩阵变换成范数有界不确定型和凸多面体型，转换前后是否等价？

参 考 文 献

[1] 嵇小辅. 不确定线性系统鲁棒控制若干问题研究. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 2006.
[2] 俞立. 鲁棒控制 —— 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2001.
[3] 周武能. 区域稳定约束鲁棒控制理论及应用. 北京: 科学出版社, 2009.
[4] 鲁仁全, 苏宏业, 薛安克, 等. 奇异系统的鲁棒控制理论. 北京: 科学出版社. 2008
[5] 梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社，2008.
[6] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制 —— 自由权矩阵方法. 北京: 科学出版社, 2008.

第 8 章　线性系统性能分析

给定一个系统，如何评价其性能是好还是坏？经典控制理论提到，典型二阶线性系统主要有最大超调、上升时间、调节时间等时域指标，但这些指标对多输入多输出系统难以适用，特别是难以评价系统的抗扰动性能。本章介绍线性系统的一些性能指标，如系统对不同扰动的抑制性能，系统极点区域等。

8.1　线性系统的稳定性

考虑线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{8.1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为已知的定常矩阵。设定 Lyapunov 函数为

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \tag{8.2}$$

其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定对称矩阵，因此 $V(x)$ 正定。把函数 $V(x(t))$ 沿着系统 (8.1) 状态轨迹对时间 t 求导，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t)\\ &= (Ax(t))^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P(Ax(t))\\ &= x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P + PA)x(t)\end{aligned}$$

如果存在一个矩阵 P 使得

$$A^{\mathrm{T}}P + PA < 0 \tag{8.3}$$

则 $\dot{V}(x)$ 负定，从而保证了线性系统 (8.1) 的稳定性，即线性系统 (8.1) 是稳定的，如果存在矩阵 $P > 0$ 满足 LMI (8.3)。

对于离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{8.4}$$

类似地，可以设定 Lyapunov 函数为

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \tag{8.5}$$

其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定对称矩阵，因此 $V(x)$ 正定。对该函数求前向差分得

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) - V(x(k)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}PA - P)x(t)\end{aligned}$$

如果存在一个矩阵 P 使得

$$A^{\mathrm{T}}PA - P < 0 \tag{8.6}$$

则 $\Delta V(x(k))$ 负定，从而保证了线性系统 (8.4) 的稳定性，即线性系统 (8.4) 是稳定的，如果存在矩阵 $P > 0$ 满足 LMI (8.6)。

8.2 连续线性系统的增益指标

实际的工程系统不可避免地要受到外部干扰的影响。带扰动输入的线性系统可以描述为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D\omega(t)\end{aligned} \tag{8.7}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量，$\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ 是外部扰动输入，$z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为感兴趣的系统被调输出，A，B，C，D 为已知的定常矩阵。

预先定义信号大小的某种度量 size(·)，对于某一类外部干扰信号 $\omega(t)$，如果系统的增益

$$\Gamma = \frac{\text{size}(z)}{\text{size}(\omega)}$$

或等价地

$$\Gamma = \sup_{\omega}\{\text{size}(z) : \text{size}(\omega) \leqslant 1\}$$

很小，则可以认为系统抑制外部干扰能力强，系统的性能好。很显然，不同的信号度量方式对应着不同的系统增益，也对应着不同的系统性能。下面给出常用的几种描述信号大小的方法。

对平方可积的信号 $f(t)$，定义 $\|f(t)\|_2 = \left(\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$，其中 $\|f(t)\| = \sqrt{f^{\mathrm{T}}(t)f(t)}$ 是向量的 Euclidean 范数。这样定义的 $\|f(t)\|$ 表示信号 $f(t)$ 的总能量。记能量有限信号的全体为 $\mathcal{L}_2$，即

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ f(t) : \int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t < \infty \right\}$$

$\|f(t)\|_2$ 也称为信号 $f(t)$ 的 L_2 范数。

对于幅值有限的信号 $f(t)$，定义 $\|f(t)\|_\infty = \sup_{t\geqslant 0}\|f(t)\|$，其中 $\|f(t)\|$ 为信号 $f(t)$ 的 Euclidean 范数。当 $f(t)$ 是标量信号时，$\|f(t)\|_\infty$ 等于 $f(t)$ 的峰值。同样可以将所有幅值有限的信号定义为集合 $\mathcal{L}_\infty$，即

$$\mathcal{L}_\infty = \{f(t) : \|f(t)\| < \infty\}$$

$\|f(t)\|_\infty$ 也称为信号 $f(t)$ 的 L_∞ 范数。

利用以上定义的度量信号大小的范数，可以定义系统 (8.7) 的一些性能指标：

(1) IE (impulse-to-energy) 增益

$$\Gamma_{\text{ie}} = \sup_{\substack{\omega(t)=\omega_0\delta(t),\\ \|\omega_0\|\leqslant 1}} \|z\|_2$$

(2) EP (energy-to-peak) 增益

$$\Gamma_{\text{ep}} = \sup_{\|\omega\|_2\leqslant 1} \|z\|_\infty$$

(3) EE (energy-to-energy) 增益

$$\Gamma_{\text{ee}} = \sup_{\|\omega\|_2\leqslant 1} \|z\|_2$$

(4) PP (peak-to-peak) 增益

$$\Gamma_{\text{pp}} = \sup_{\|\omega\|_\infty\leqslant 1} \|z\|_\infty$$

8.2.1　线性系统的 Γ_{ie} 性能

如果考虑系统 (8.7) 对脉冲干扰输入的抑制性能，我们有如下定理。

定理 8.1　如果系统 (8.7) 是严格真 (即 $D = 0$) 和渐近稳定的，则 $\Gamma_{\text{ie}} = \|B^{\mathrm{T}}YB\|^{1/2}$，$Y$ 为 Lyapunov 方程

$$YA + A^{\mathrm{T}}Y + C^{\mathrm{T}}C = 0 \tag{8.8}$$

的解。等价地，Γ_{ie} 也可以由式 (8.9) 得到

$$\Gamma_{\text{ie}} = \inf_{P>0}\left\{\|B^{\mathrm{T}}PB\|^{1/2} : PA + A^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C < 0\right\} \tag{8.9}$$

证明　系统 (8.7) 在零初始条件与脉冲输入 $\omega(t) = \omega_0\delta(t)$ 下的状态轨迹为

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\omega_0\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{At}B\omega_0$$

系统输出为 $z(t) = C\mathrm{e}^{At}B\omega_0$，其 $\mathcal{L}_2$ 范数为

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \omega_0^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}} t} C^{\mathrm{T}} C \mathrm{e}^{At} B \omega_0 \mathrm{d}t = \omega_0^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} Y B \omega_0$$

其中 $Y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}} t} C^{\mathrm{T}} C \mathrm{e}^{At} \mathrm{d}t$ 为系统的能观 Gramian。由于系统是渐近稳定的，故矩阵 Y 存在，且满足 Lyapunov 方程 (8.8)。进一步，由矩阵范数的性质可知，对任意满足 $\|\omega_0\| \leqslant 1$ 的 ω_0，

$$\|z(t)\|_2^2 \leqslant \|B^{\mathrm{T}} Y B\| \omega_0^{\mathrm{T}} \omega_0 \leqslant \|B^{\mathrm{T}} Y B\|$$

因此 $\Gamma_{\mathrm{ie}} \leqslant \|B^{\mathrm{T}} Y B\|^{1/2}$。

另一方面，如果取 ω_0 为矩阵 $B^{\mathrm{T}} Y B$ 最大特征值所对应的单位特征向量，则

$$\Gamma_{\mathrm{ie}}^2 \geqslant \omega_0^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} Y B \omega_0 = \|B^{\mathrm{T}} Y B\|$$

综合以上结果，可得 $\Gamma_{\mathrm{ie}} = \|B^{\mathrm{T}} Y B\|^{1/2}$。

将 (8.9) 中的 Lyapunov 不等式和 Lyapunov 方程 (8.8) 相减，并记 $R = P - Y$，得

$$RA + A^{\mathrm{T}} R < 0 \tag{8.10}$$

由矩阵的渐近稳定性可知 $R > 0$，故而 $P > Y \geqslant 0$。因此对 (8.9) 中的 Lyapunov 不等式的解 P，$\Gamma_{\mathrm{ie}} \leqslant \|B^{\mathrm{T}} P B\|^{1/2}$。

进而，由 LMI (8.10) 可知，对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 Lyapunov 方程 (8.8) 的解 Y，存在一个满足 (8.9) 中矩阵不等式的矩阵 P 使得 $\|P - Y\| \leqslant \varepsilon$。 □

根据定理 8.1，如果以下的优化问题：

$$\begin{aligned} &\min_{P>0} \gamma \\ &\text{s.t. } PA + A^{\mathrm{T}} P + C^{\mathrm{T}} C < 0 \\ &\qquad B^{\mathrm{T}} P B \leqslant \gamma I \end{aligned}$$

有一个最优解 γ^*，则 $\Gamma_{\mathrm{ie}} = \sqrt{\gamma^*}$。这是一个带 LMI 约束和线性目标函数的凸优化问题，可以使用 LMI 工具箱中的 mincx 求解器来求取全局最优解。

如果系统 (8.7) 含有控制输入，可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\omega(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D\omega(t) + D_u u(t) \end{aligned} \tag{8.11}$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，B_u，D_u 为已知的输入矩阵。对于给定的 $\gamma > 0$，可以设计一个状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 使闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_u K)x(t) + B\omega(t) \\ z(t) &= (C + D_u K)x(t) + D\omega(t) \end{aligned} \tag{8.12}$$

是渐近稳定的，且满足 $\Gamma_{\mathrm{ie}} \leqslant \gamma$。在 Lyapunov 不等式 (8.9) 的两边分别乘以 P^{-1}，定义 $Q = P^{-1}$ 和 $Y = KQ$，则闭环 Γ_{ie} 优化问题可以归结为以下的优化问题：

$$\min_{P>0,Y} \gamma$$
$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} AQ + QA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & Q^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}D_u^{\mathrm{T}} \\ CQ + D_uY & -I \end{bmatrix} < 0$$
$$\begin{bmatrix} -\gamma I & B^{\mathrm{T}} \\ B & -Q \end{bmatrix} \leqslant 0$$

如果该最优解 γ^* 存在，则 $\Gamma_{\mathrm{ie}} = \sqrt{\gamma^*}$，状态反馈控制器为 $u(t) = YQ^{-1}x(t)$。

8.2.2　线性系统的 H_2 性能

传递函数矩阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 的 H_2 范数定义为

$$\|G(s)\|_2 = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mathrm{j}\omega)G^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\right)^{1/2} \tag{8.13}$$

或者等价地

$$\|G(s)\|_2 = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}$$

其中 $G^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)$ 表示 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的共轭转置。trace(·) 表示矩阵的迹。

如果系统的干扰输入为

$$\omega(t) = \delta e_i$$

其中 e_i 为空间 $\mathbb{R}^n$ 中标准基的第 i 个基向量，$i = 1, 2, \cdots, q$，则对应于输入 ω 和初始条件 $x(0) = 0$ 的系统输出 z^i 为

$$z^i(t) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{At}Be_i, & t > 0 \\ De_i\delta(t), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

由于系统是稳定的，所以当 $D = 0$ 时，对于所有的 i，输出 z^i 都是平方可积的，且

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q}\|z^i\|_2^2 &= \mathrm{trace}\int_0^{\infty} B^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}C^{\mathrm{T}}C\mathrm{e}^{At}B\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{trace}\int_0^{\infty} C\mathrm{e}^{At}BB^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}C^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{trace}\int_0^{\infty} G(\mathrm{i}\omega)G^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

在该等式中，我们应用了 Parseval 引理。可以看出 $G(s)$ 的 H_2 范数的平方等于系统脉冲响应的总输出能量。由此给出系统 H_2 范数的求解方法如下。定义矩阵

$$X = \int_0^{\infty} e^{At} B B^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}} t} \mathrm{d}t$$

$$Y = \int_0^{\infty} e^{A^{\mathrm{T}} t} C^{\mathrm{T}} C e^{At} \mathrm{d}t$$

可以看出，矩阵 X 是系统的能控 Gramian 矩阵，Y 是系统的能观 Gramian 矩阵，分别满足如下的 Lyapunov 方程：

$$AX + XA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} = 0$$

$$YA + A^{\mathrm{T}}Y + C^{\mathrm{T}}C = 0$$

可得

$$\|G(s)\|_2^2 = \mathrm{trace}(CXC^{\mathrm{T}}) = \mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}YB)$$

因此，对于系统的 H_2 范数，我们有如下定理。

定理 8.2　假定系统 (8.7) 是渐近稳定的，则

(1) $\|G(s)\|_2 < \infty$ 当且仅当 $D = 0$；

(2) 如果 $D = 0$，则以下结论是等价的：

(i) $\|G(s)\|_2 < \gamma$；

(ii) 存在对称正定矩阵 X 使得

$$AX + XA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} < 0, \quad \mathrm{trace}(CXC^{\mathrm{T}}) < \gamma$$

(iii) 存在对称正定矩阵 Y 使得

$$A^{\mathrm{T}}Y + YA + C^{\mathrm{T}}C < 0, \quad \mathrm{trace}(B^{\mathrm{T}}YB) < \gamma$$

由此可知，可以使用 LMI 工具箱中的 feasp 函数来检验系统是否满足给定的 H_2 范数约束条件，进一步，可以使用 mincx 求解器来计算系统传递函数的 H_2 范数最小上界。

同样，如果系统含有控制输入，如 (8.11) 所示，则可以设计状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$。不失一般性，假设 $D = 0$，$D_\omega = 0$，如果存在正定对称矩阵 X 和矩阵 Y 满足

$$AX + BY + XA^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} < 0, \quad \mathrm{trace}(CXC^{\mathrm{T}}) < \gamma \tag{8.14}$$

则可以构造状态反馈控制器 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 使得闭环系统的 H_2 范数小于 γ。

8.2.3　线性系统的 Γ_{ee} 性能

对于线性系统的 Γ_{ee} 增益，有如下定理。

定理 8.3　考虑线性系统 (8.7)。对于给定常数 $\gamma > 0$，系统渐近稳定且 $\Gamma_{\mathrm{ee}} < \gamma$，如果存在正定对称矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{8.15}$$

证明　由式 (8.15) 可知 $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$，从而系统是渐近稳定的，且 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$ 是系统的一个 Lyapunov 函数。

进一步，上式等价于

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

考虑性能指标

$$J(\omega) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma}\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 \right) \mathrm{d}t \tag{8.16}$$

考虑到系统的零初始条件和渐近稳定性，有 $V(x(0)) \geqslant 0$，$V(x(\infty)) = 0$，因此

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) \right) \mathrm{d}t \\ &< \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) \right) \mathrm{d}t + V(x(\infty)) - V(x(0)) \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) + \dot{V}(x(t)) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ &< 0 \end{aligned}$$

由此可知 $J < 0$，即

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2\|\omega\|_2^2 \tag{8.17}$$

因此 $\Gamma_{\mathrm{ee}} < \gamma$。 □

考虑系统 (8.7)，传递函数为 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 的 H_∞ 范数定义为

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(\mathrm{j}\omega))$$

即系统频率响应矩阵的最大奇异值的峰值。可以证明，时域增益 Γ_{ee} 正好等于传递函数 $G(s)$ 的 H_∞ 范数，即

$$\Gamma_{\mathrm{ee}} = \|G(s)\|_\infty \tag{8.18}$$

如果系统含有控制输入，如 (8.11) 所示，同样可以设计状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 形成闭环系统 (8.12)。在 (8.15) 的左右均乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I, I\}$，代入 $u(t) = Kx(t)$ 并定义 $P^{-1} = X$，$KX = Y$，这时，有如下的控制器设计算法：如果存在正定对称矩阵 X 和矩阵 Y 满足

$$\begin{bmatrix} AX + B_uY + XA^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}B_u^{\mathrm{T}} & B & (CX + D_uY)^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ CX + D_uY & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

则可以构造状态反馈控制器 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 使得闭环系统渐近稳定且 $\Gamma_{\mathrm{ee}} < \gamma$。

8.3 离散线性系统的增益指标

考虑离散时间线性系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\omega(k) \\ z(k) &= Cx(k) + D\omega(k) \end{aligned} \tag{8.19}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量，$\omega(k) \in \mathbb{R}^p$ 为系统的外部扰动输入，$z(k) \in \mathbb{R}^q$ 是系统被调输出。

类似于连续线性系统，平方和有限信号 $f(k)$ 的大小可以用 L_2 范数来度量

$$\|f(k)\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\|f(k)\|^2\right)^{1/2}$$

幅值有限信号 f 的大小可以用 L_∞ 范数来度量

$$\|f(k)\|_\infty = \sup_{k\geqslant 0}\|f(k)\|$$

用以上范数定义来衡量信号大小，可以定义离散时间系统的性能指标如下。

(1) IE (impulse-to-energy) 增益

$$\Lambda_{\mathrm{ie}} = \sup_{\substack{\omega(k)=\omega_0\delta(k) \\ \|\omega_0\|\leqslant 1}} \|z\|_2$$

(2) EP (energy-to-peak) 增益

$$\Lambda_{\mathrm{ep}} = \sup_{\|\omega\|_2\leqslant 1} \|z\|_\infty$$

(3) EE (energy-to-energy) 增益

$$\Lambda_{\mathrm{ee}} = \sup_{\|\omega\|_2 \leqslant 1} \|z\|_2$$

(4) PP (peak-to-peak) 增益

$$\Lambda_{\mathrm{pp}} = \sup_{\|\omega\|_\infty \leqslant 1} \|z\|_\infty$$

8.3.1 离散系统的 Λ_{ie} 性能

定理 8.4 若系统 (8.19) 是渐近稳定的，则系统的 IE 增益 $\Lambda_{\mathrm{ie}} = \|B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D\|^{1/2}$，其中 P 为矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}PA - P = -C^{\mathrm{T}}C \tag{8.20}$$

的解。Λ_{ie} 也可以由式 (8.21) 得到

$$\Lambda_{\mathrm{ie}} = \inf_{Q>0} \left\{\|B^{\mathrm{T}}QB + D^{\mathrm{T}}D\|^{1/2} : A^{\mathrm{T}}QA - Q < -C^{\mathrm{T}}C\right\} \tag{8.21}$$

证明 由线性系统理论可知，系统 (8.19) 的状态 $x(k)$ 为

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}B\omega(i)$$

在零初始条件下脉冲扰动 $\omega(k) = \omega_0\delta(k)$ 系统输出是

$$z(k) = \begin{cases} D\omega_0, & k = 0 \\ CA^{k-1}B\omega_0, & k \geqslant 1 \end{cases}$$

该输出信号的 L_2 范数为

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \omega_0^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}D\omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\omega_0^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{k-1}C^{\mathrm{T}}CA^{k-1}B\omega_0 \\ &= \omega_0^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D)\omega_0 \end{aligned}$$

其中 $P = \sum_{i=0}^{\infty}(A^{\mathrm{T}})^k C^{\mathrm{T}}CA^k$，由于系统 (8.19) 是渐近稳定的，故 P 存在，且满足 Lyapunov 方程 (8.20)。

进一步，由矩阵范数和性质可知，对任意满足 $\|\omega_0\| \leqslant 1$ 的 ω_0

$$\|z(t)\|_2^2 \leqslant \|B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D\|\omega_0^{\mathrm{T}}\omega_0 \leqslant \|B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D\|$$

因此 $\Lambda_{\mathrm{ie}} \leqslant \|B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D\|^{1/2}$

另一方面，如果取 ω_0 为对应矩阵 $B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D$ 最大特征值的单位特征向量，则

$$\Lambda_{\mathrm{ie}}^2 \geqslant \omega_0^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D)\omega_0 = \|B^{\mathrm{T}}PB + D^{\mathrm{T}}D\|$$

综合以上结果，可得 $\Gamma_{\rm ie} = \|B^{\rm T}YB\|^{1/2}$。类似，可以证明 (8.21) □

由此，可以建立如下的优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{P>0} \gamma\\ &\text{s.t. } A^{\rm T}PA - P + C^{\rm T}C < 0\\ &\qquad B^{\rm T}PB + D^{\rm T}D \leqslant \gamma I\end{aligned}$$

如果该优化问题存在最优解 γ^*，则 $\Lambda_{\rm ep} = \sqrt{\gamma^*}$。该优化问题是一个带 LMI 约束的线性目标函数凸优化问题，可以使用 LMI 工具箱中 mincx 来求解。

8.3.2 离散系统的 $\Lambda_{\rm ep}$ 性能

定理 8.5 系统 (8.19) 是渐近稳定的，且满足 $\Lambda_{\rm ee} < \gamma$，如果存在正定对称矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & A^{\rm T}P & C^{\rm T}\\ 0 & -\gamma I & B^{\rm T}P & D^{\rm T}\\ PA & PB & -P & 0\\ C & D & 0 & -\gamma I\end{bmatrix} < 0 \tag{8.22}$$

证明 由 LMI (8.22) 可知 $-P + A^{\rm T}PA < 0$，从而系统 (8.19) 是渐近稳定的，且

$$V(x(k)) = x^{\rm T}(k)Px(k) \tag{8.23}$$

是其 Lyapunov 函数。考虑性能指标

$$J(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\|z(k)\|^2 - \gamma\|\omega(k)\|^2\right) \tag{8.24}$$

利用零初始条件的性质可知

$$\begin{aligned}J(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\|z(k)\|^2 - \gamma\|\omega(k)\|^2\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\|z(k)\|^2 - \gamma\|\omega(k)\|^2 + \Delta V(x(k))\right) - V(x(\infty))\\ &\leqslant \begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\rm T}\left(-\begin{bmatrix} P & 0\\ 0 & \gamma I\end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}[C \quad D]^{\rm T}[C \quad D] + [A \quad B]^{\rm T}P[A \quad B]\right)\begin{bmatrix} x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8.25}$$

由 Schur 补引理可知，(8.22) 等价于

$$-\begin{bmatrix} P & 0\\ 0 & \gamma I\end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}[C \quad D]^{\rm T}[C \quad D] + [A \quad B]^{\rm T}P[A \quad B] < 0 \tag{8.26}$$

从而 $J < 0$。 □

由此可以建立如下优化问题：

$$\begin{aligned} &\min_{P>0} \gamma \\ &\text{s.t. } (8.22) \end{aligned} \tag{8.27}$$

如果该优化问题有最优解 γ^*，则 $\Lambda_{\mathrm{ee}} = \gamma^*$。

8.3.3　离散系统的 Λ_{pp} 性能

定义 S_r 为系统 (8.19) 的状态在单位峰值干扰下从原点出发在有限时间内能到达状态的集合，则 $\Lambda_{\mathrm{pp}} = \mathrm{ess\,sup}_{x(k)\in S_r}\|Cx(k) + D\omega(k)\|$。集合 S_i 称为是非逃逸集，如果 (1) S_i 包含原点；(2) $x(0) \in S_i$，则对任意的 $k > 0$，都有 $x(k) \in S_i$。很显然，可达集可看作为非逃逸集的一个子集，任意的非逃逸集都包含一个可达集，因此给出了 Λ_{pp} 的一个上界。这种用非逃逸集来逼近可达集而得到的最紧上界，称为 $*$ 范数。即由于非逃逸集 S_i 包含系统 (8.19) 的可达集 S_r 从而给出了该系统 L_∞ 增益的上界

$$\Lambda_{\mathrm{pp}} = \sup_{x(k)\in S_r} \|Cx(k) + D_\omega\omega(k)\| \leqslant \max_{x(k)\in S_i} \|Cx(k) + D_\omega\omega(k)\|$$

而进一步优化的 Λ_{pp} 是优化其上界得到的最紧上界，记为

$$\|H\|_* = \inf \max_{x(k)\in S_i} \|Cx(k) + D_\omega\omega(k)\|$$

定理 8.6　考虑离散线性系统 (8.19)。椭圆 $S_i = \{x(k) \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \leqslant 1\}$ 为该系统的一个非逃逸集，当且仅当存在对称正定矩阵 P 和标量 $\alpha \geqslant 0$ 满足如下的矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} -P + \alpha P & 0 & A^{\mathrm{T}}P \\ 0 & -\alpha I & B_\omega^{\mathrm{T}}P \\ PA & PB_\omega & -P \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{8.28}$$

证明　我们分别证明其充分性和必要性。

充分性证明。假定存在一个标量 $\alpha \geqslant 0$ 满足式 (8.28)。首先，我们定义泛函 $V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$ 并证明对于任意满足 $\|\omega\|_\infty \leqslant 1$ 的干扰输入 $\omega(k)$ 和状态 $x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \geqslant 1$，$V(x(k))$ 的前向差分满足 $\Delta V(x(k)) \leqslant 0$。由 Schur 补引理和式 (8.28) 可知

$$\begin{aligned} \psi(x(k), \omega(k)) &= x^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}PA - P)x(k) + 2x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}PB_\omega\omega(k) \\ &\quad + \omega^{\mathrm{T}}(k)B_\omega^{\mathrm{T}}PB_\omega\omega(k) \\ &\leqslant \alpha\big(\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\big) \end{aligned}$$

因而 $V(x(k))$ 的前向差分满足

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k)) &= x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \\ &\leqslant \alpha\big(\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\big) \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

现在证明，任意进入椭圆 S_i 的状态 $x(k) \in S_i$ 将停留在 S_i 中。采用反证法，假设存在一个状态 $x(k) \in S_i$，但 $x(k+1) \notin S_i$，则由式 (8.28) 可知

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}PA & A^{\mathrm{T}}PB_\omega \\ B_\omega^{\mathrm{T}}PA & B_\omega^{\mathrm{T}}PB_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} \\ &\leqslant \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P-\alpha P & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

进一步有

$$(1-\alpha)x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + \alpha\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) > 1$$

因而

$$x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) > \frac{1-\alpha\omega^{\mathrm{T}}(T)\omega(k)}{1-\alpha} \geqslant 1$$

这与题设相矛盾。所以任意的进入椭圆 S_i 的状态向量将停留在该椭圆内。

必要性证明。容易验证 $S_i = \{x(k) \in \mathbb{R}^n : x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) \leqslant 1\}$ 为非逃逸集，则对任意满足 $\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) \leqslant x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$ 的 $x(k)$，$\omega(k)$ 都有不等式 $\psi(x(k),\omega(k)) \leqslant 0$ 成立。采用反证法，假设该条件不成立，则一定存在 x_0 和 ω_0 使得 $\omega_0^{\mathrm{T}}\omega_0 \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0$ 但 $\psi(x_0,\omega_0) > 0$。由此可以推断 $x_0 \neq 0$，否则有 $x_0^{\mathrm{T}}Px_0 = 0$，进而 $\omega_0 = 0$，进而 $\psi(x_0,\omega_0) = 0$。而由 $x_0 \neq 0$ 可以推断 $x_0^{\mathrm{T}}Px_0 > 0$ 并可以定义如下向量：

$$x_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\mathrm{T}}Px_0}}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{x_0^{\mathrm{T}}Px_0}}$$

容易验证 x_1 和 ω_1 满足 $x_1 \in S_i$，$\psi(x_1,\omega_1) > 0$ 和 $\omega_1^{\mathrm{T}}\omega_1 \leqslant x_1^{\mathrm{T}}Px_1$。考虑如下系统：

$$x(k+1) = Ax(k) + B_\omega\omega_1, \quad x(0) = x_1$$

则容易得 $V(x(0)) = 1$，$\Delta V(x(0)) > 0$，因此可以推出 $V(x(1)) > 1$，所以 $x(1) \notin S_i$，即 S_i 是可逃逸的，这与题设相矛盾。

很显然，该定理对于 $P = 0$ 也成立。如果 $P \neq 0$，必定存在 x_2 和 ω_2 满足 $\omega_2^{\mathrm{T}}\omega_2 < x_2^{\mathrm{T}}Px_2$，运用 S-procedure，存在 $\alpha \geqslant 0$，使得 $\psi(x(k),\omega(k)) \leqslant \alpha(\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k))$，这与式 (8.28) 等价。 □

定理 8.7 给定标量 $\gamma>0$，离散线性系统 (8.19) 是稳定的，且 $\Gamma_{\text{pp}}<\gamma$，当且仅当存在对称正定矩阵 P，标量 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\sigma>0$ 满足矩阵不等式 (8.28) 和 (8.29)

$$\begin{bmatrix} -\sigma P & 0 & C^{\mathrm{T}} \\ 0 & -(\gamma^2-\sigma)I & D_\omega^{\mathrm{T}} \\ C & D_\omega & -I \end{bmatrix}<0 \tag{8.29}$$

证明 如果存在对称正定矩阵 P 和标量 $\alpha\geqslant 0$ 满足式 (8.28)，则椭圆 $S_i=\{x(k)\in\mathbb{R}^n: x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\leqslant 1\}$ 是一个非逃逸集。同时，由 Schur 补引理和式 (8.28) 可得 $A^{\mathrm{T}}PA-P<0$，所以系统 (8.19) 在 $\omega(k)=0$ 时是渐近稳定的。

为了符号描述方便，引入变量

$$u=\max_{\substack{x(k)\in S_i\\ \omega(k)\in BL_\infty^p}}\|Cx(k)+D_\omega\omega(k)\|$$

和

$$U=\left\{\gamma:\exists\sigma\in\mathbb{R}\ \text{满足}\ (8.28)\right\}$$

我们只要证明 $u=\inf U$。

注意到 $x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\leqslant 1$ 和 $\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\leqslant 1$，则由 Schur 补引理

$$\begin{aligned}\|z(k)\|^2&=\|Cx(k)+D_\omega\omega(k)\|^2\\&=\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}C & C^{\mathrm{T}}D_\omega\\ D_\omega^{\mathrm{T}}C & D_\omega^{\mathrm{T}}D_\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}\\&<\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\sigma P & 0\\ 0 & (\gamma^2-\sigma)I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ \omega(k)\end{bmatrix}\\&=\sigma x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)+(\gamma^2-\sigma)\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\\&\leqslant\sigma+(\gamma^2-\sigma)\\&=\gamma^2\end{aligned}$$

因而 $\|z(k)\|<\gamma$，或 $u<\gamma$。可以证明，u 也是 U 的最紧上界。 □

8.4 线性系统的区域极点配置

极点配置是控制系统分析与综合的基本问题。最初的极点配置问题考虑的是精确极点配置，即将闭环系统的极点配置在复平面事先给定的位置上。但是，由于模型的不确定性和各种扰动的存在，使得精确极点配置难以真正实现。一种折衷的办法是将闭环系统的极点配置在复平面上的适当区域内，从而保证系统既定的动、

静态性能。对于控制系统设计而言，感兴趣的区域有：保证连续系统的状态响应有衰减度 α 的半平面 $D_\lambda = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leqslant -\alpha\}$、保证离散系统性能指标的圆盘区域、条状区域、扇形区域等。本节介绍一类可以用 LMI 刻画的区域，称为 LMI 区域。可以证明，矩阵的特征值位于这样一个 LMI 区域的充分必要条件可以用一系列的 LMI 来表达，从而通过求解 LMI 的可行性问题就可以求解极点的分析与综合问题。

8.4.1 复平面区域的 LMI 描述

定义 8.1 对复平面区域的区域 D，如果存在对称矩阵 L 和矩阵 M 使得

$$D = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^{\mathrm{T}} < 0\} \tag{8.30}$$

则称 D 为 LMI 区域。矩阵值函数

$$f_D = L + sM + \bar{s}M^{\mathrm{T}}$$

称为 LMI 区域 D 的特征函数。

由定义可知，复平面上的一个 LMI 区域就是以某个以 s 和 $\bar{s}$ 为变量的 LMI 的可行域。进而，对于任意的 $s \in D$，$f_D(\bar{s}) = \overline{f_D(s)} < 0$，故而 $\bar{s} \in D$。因此，LMI 区域关于复平面上的实轴是对称的。

现针对上述四种典型区域，讨论复平面区域的 LMI 描述方法。

连续系统具有指定衰减度的区域 $D_\lambda = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leqslant -\alpha\}$ 是一个 LMI 区域，如图 8.1 所示，特征函数为

$$f_{D_\alpha} = 2\alpha + s + \bar{s}$$

如图 8.2 所示的复平面上半径为 r，中心在 $(-q, 0)$ 的圆盘 $D(r, q)$ 也是 LMI 区域。该区域可表示为

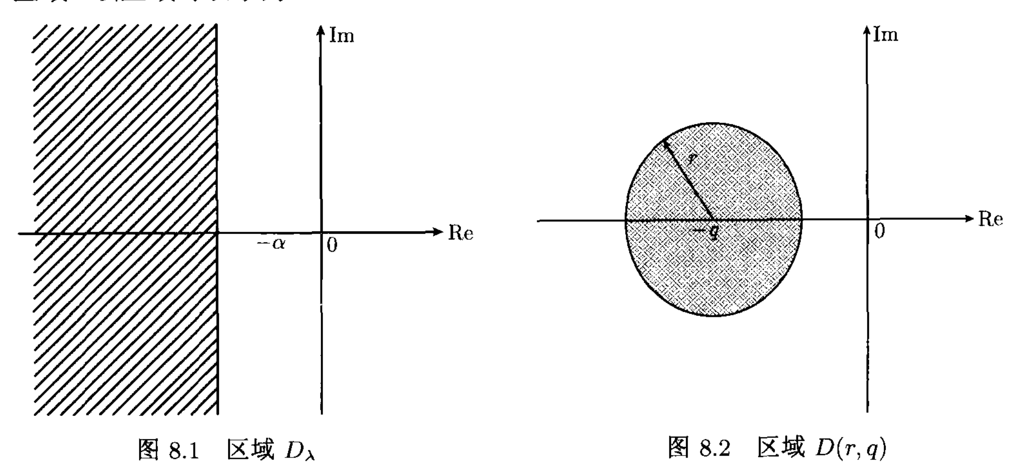


图 8.1 区域 D_λ

图 8.2 区域 $D(r, q)$

$$D(r,q)=\{s\in\mathbb{C}:(s+q)(\bar{s}+q)-r^2<0\}$$

由 $r>0$ 可以推出 $(s+q)(\bar{s}+q)-r^2<0$ 等价于

$$\begin{bmatrix}-r & q+s\\ q+\bar{s} & -r\end{bmatrix}<0$$

从而矩阵值函数为

$$f_{D(r,q)}=\begin{bmatrix}-r & q+s\\ q+\bar{s} & -r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-r & q\\ q & -r\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\bar{s}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

特别地，当 $q=0$，$r=1$ 时可得中心在原点的单位圆盘也是一个 LMI 区域，相应的特征函数为

$$f_{D(0,1)}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\bar{s}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

如图 8.3 所示的扇形区域 D_{cs} 的约束条件为

$$D_{cs}=\left\{s=x+\mathrm{j}y:x,y\in\mathbb{R},\tan\theta<-\frac{|y|}{x}\right\}$$

容易验证 D_{cs} 是一个 LMI 区域，特征函数为

$$f_{D_{cs}}=s\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}+\bar{s}\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

如图 8.4 所示的条形区域 $D_{vs}=\{s\in\mathbb{C}:h_1<\mathrm{Re}(s)<h_2\}$ 是一个 LMI 区域，特征函数为

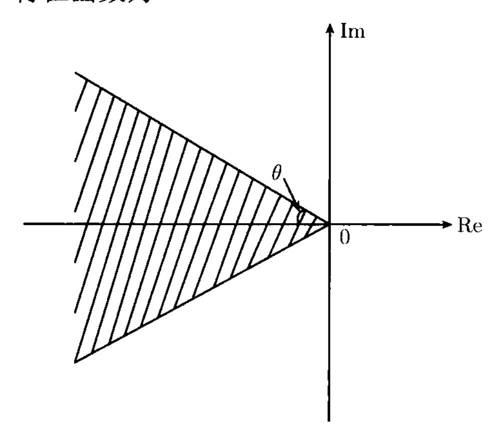


图 8.3　区域 D_{cs}

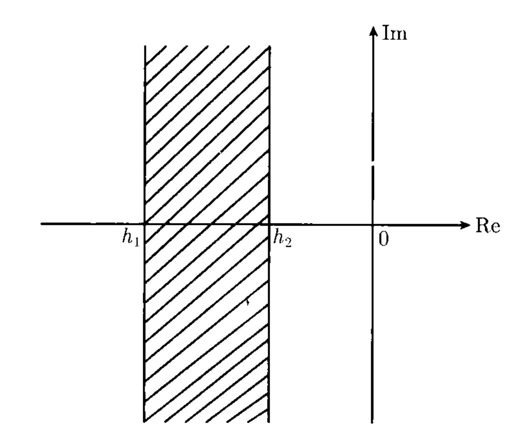


图 8.4　区域 D_{vs}

$$f_{D_{vs}}=\begin{bmatrix}2h_1 & 0\\ 0 & -2h_2\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\bar{s}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

对给定的两个 LMI 区域 D_1 和 D_2，如果它们的特征函数分别是 f_{D1} 和 f_{D2}，利用集合运算的性质可知，这两个区域的交集 $D=D_1\cap D_2$ 也是一个 LMI 区域，

且特征函数为

$$f_D = \text{diag}\{f_{D_1}, f_{D_2}\}$$

进一步，任意多个 LMI 区域的交集也是一个 LMI 区域，由这一性质可以得到一些更为复杂的 LMI 区域。由于任意一个凸区域都可以用一个凸多边形来近似，而且这样的近似可以达到任意需要的精度。因此，对于控制系统感兴趣的区域（实系统的极点总是以共轭的形式出现，因此控制系统出现的凸区域都是关于实轴对称），总可以找到一个 LMI 区域来近似，而且这种近似可以达到任意精度。

8.4.2 区域极点分布的 LMI 描述

定义 8.2 对复平面中给定的 LMI 区域 D 和矩阵 A，如果矩阵 A 所有的特征值都位于区域 D 内，即 $\sigma(A) \subset D$，其中 $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\}$，则矩阵 A 称为 D 稳定的。

本节讨论矩阵 A 是否 D 稳定的判别准则。

首先给出如下引理。

引理 8.1 埃尔米特矩阵 X 的实部 $\text{Re}(X)$ 是一个对称正定矩阵。

证明 从 $X = \text{Re}(X) + \text{jIm}(X)$ 和 $X = X^{\text{T}}$ 可得

$$\text{Re}(X) + \text{jIm}(X) = (\text{Re}(X))^{\text{T}} - \text{j}(\text{Im}(X))^{\text{T}}$$

因此，$\text{Re}(X) = (\text{Re}(X))^{\text{T}}$，$\text{Im}(X) = -(\text{Im}(X))^{\text{T}}$，即 $\text{Re}(X)$ 是对称的，$\text{Im}(X)$ 是反对称的。

对任意适当维数的非零向量 v，由 $\text{Im}(X)$ 的反对称性可知 $v^{\text{T}}\text{Im}(X)v = 0$，由此可知 $v^{\text{T}}Xv = v^{\text{T}}\text{Re}(X)v$；由矩阵的正定性可知 $v^{\text{T}}\text{Re}(X)v > 0$，故而 $\text{Re}(X)$ 对称正定。 □

定理 8.8 给定由 (8.30) 描述的 LMI 区域 D，矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 D 稳定的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X 使得

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (AX) + M^{\text{T}} \otimes (AX)^{\text{T}} < 0 \tag{8.31}$$

证明 在此，仅证明充分性。

假设存在矩阵 X 满足 (8.31)。设 λ 是 A 的特征值，$v \in \mathbb{C}^n$ 是使得 $v^{\text{H}}A = \lambda v^{\text{H}}$ 的非零向量。应用矩阵 Kronecker 乘积的性质可知

$$\begin{aligned}
&(I \otimes v)^{\text{H}} M_D(A, X)(I \otimes v) \\
=&(I \otimes v)(L \otimes X + M \otimes (AX) + M^{\text{T}} \otimes (AX)^{\text{T}})(I \otimes v) \\
=&L \otimes (v^{\text{H}}Xv) + M \otimes (v^{\text{H}}AXv) + M^{\text{T}} \otimes (v^{\text{H}}(AX)^{\text{T}}v) \\
=&v^{\text{H}}Xv(L + \lambda M + \bar{\lambda} M) \\
=&v^{\text{H}}Xvf_D(\lambda)
\end{aligned}$$

由 $M_D(A,X)<0$ 和 $X>0$ 可以推出 $f_D(\lambda)<0$，即 $\lambda\in D$。由 $\lambda\in\sigma(A)$ 的任意性可知，矩阵 A 是 D 稳定的。 □

对于左半开复平面，其特征函数是 $f_D=s+\bar{s}$，其 $M_D(A,X)=1\otimes(XA)+1\otimes(A^{\mathrm{T}}X)=XA+A^{\mathrm{T}}X$，根据定理 8.8，矩阵 A 的所有特征值均在左半开复平面的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X 使得

$$AX+XA^{\mathrm{T}}<0$$

这正是连续系统的 Lyapunov 不等式。

对于矩阵 A 的所有特征值均在半径为 r，半径为 $(-q,0)$ 的圆盘中的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X，使得

$$\begin{bmatrix} -rX & qX+AX \\ qX+XA^{\mathrm{T}} & -rX \end{bmatrix}<0$$

特别的，矩阵 A 的特征值均在以原点为中心的单位圆中的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X 使得

$$\begin{bmatrix} -X & AX \\ XA^{\mathrm{T}} & -X \end{bmatrix}<0$$

该式进一步等价于

$$\begin{cases} AXA^{\mathrm{T}}-X<0 \\ X>0 \end{cases}$$

这正是离散系统的 Lyapunov 不等式。

推论 8.1　如果给定两个 LMI 区域 D_1 和 D_2，矩阵 A 同时是 D_1 稳定和 D_2 稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X 满足

$$M_{D_1}(A,X)<0,\quad M_{D_2}(A,X)<0$$

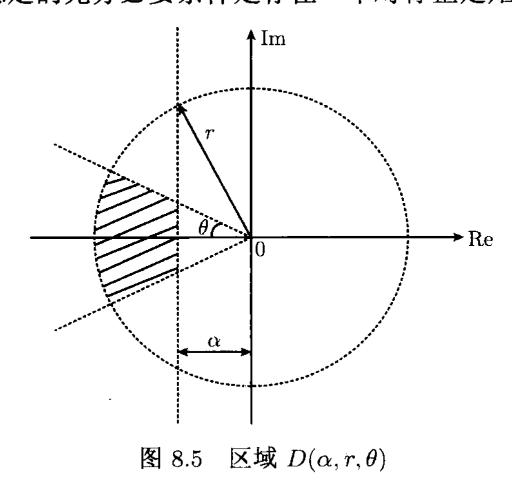


图 8.5　区域 $D(\alpha,r,\theta)$

例如，在连续二阶系统中，具有极点 $\lambda=\zeta\omega_n\pm \mathrm{j}\omega_d$ 的阶跃响应可以由自然震荡频率 $\omega_n=|\lambda|$，阻尼比 ζ 和阻尼自然频率 ω_d 确定，因此可以通过将 λ 确定在复平面适当的区域内来保证二阶系统所期望的过渡过程特性。例如考虑如图 8.5 所示的 $D(\alpha,r,\theta)$，这样的一个区域可以用

$$D(\alpha,r,\theta)=\{x+\mathrm{j}y\in\mathbb{C}:x<-\alpha,|x+\mathrm{j}y|<r,x\tan\theta<-|y|\}$$

来刻画，其中 $\alpha > 0$，r，θ 是给定的参数。将系统极点配置在 $D(\alpha, r, \theta)$ 内，就可以保证系统具有最小衰减度 α，最小阻尼比 ζ 和最大自然频率 $\omega_n = r\sin\theta$，这将进一步保证系统的一些指标，诸如最大超调、衰减时间、调节时间、上升时间等过渡过程指标不超过由 ζ 和 ω_n 决定的上界。由推论 8.1 可知，矩阵 A 的特征值均位于区域 $D(\alpha, r, \theta)$ 的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X 使得

$$AX + XA^{\mathrm{T}} + 2\alpha X < 0$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX \\ XA^{\mathrm{T}} & -rX \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} (AX + XA^{\mathrm{T}})\sin\theta & (AX - XA^{\mathrm{T}})\cos\theta \\ (XA^{\mathrm{T}} - AX)\cos\theta & (AX + XA^{\mathrm{T}})\sin\theta \end{bmatrix} < 0$$

以下定理给出了状态反馈控制器设计算法。

定理 8.9 给定由 (8.30) 描述的 LMI 区域 D，矩阵 $A + BK$ 是 D 稳定的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X，矩阵 Y 满足以下 LMI:

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (AX + BY) + M^{\mathrm{T}} \otimes (AX + BY)^{\mathrm{T}} < 0 \tag{8.32}$$

如果该 LMI 有可行解，则可以构造状态反馈控制器为

$$u(t) = YX^{-1}x(t)$$

证明 在 (8.31) 中用 $A + BF$ 代替 A，并引入 $Y = KX$ 即可得 (8.32)。 □

8.4.3 复平面区域的 QMI 描述

QMI 区域是比 LMI 区域更一般的复平面区域，本节介绍 QMI 区域的基本概念与性质。

定义 8.3 复平面上满足

$$f_{DQ}(s) = R_{11} + R_{12}s + R_{12}^{\mathrm{T}}\bar{s} + R_{22}s\bar{s} < 0$$

的点 s 的集合称为 QMI 区域，即

$$D_{\mathrm{QMI}} = \{s \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}s + R_{12}^{\mathrm{T}}\bar{s} + R_{22}s\bar{s} < 0\} \tag{8.33}$$

其中 $R_{11} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，$R_{12} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，$R_{22} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，$R_{11}$，$R_{22}$ 为对称矩阵，$R_{22} = LL^{\mathrm{T}}$ 是半正定矩阵，d 为 D_{QMI} 的秩。$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^{\mathrm{T}} & R_{22} \end{bmatrix}$ 为 R_{QMI} 的矩阵。

可以看出，D_{QMI} 是关于实轴对称的凸区域。如果取 $R_{22} = 0$，则 QMI 区域变成普通的 LMI 区域，因此，LMI 区域是 QMI 区域的特例。

定理 8.10 给定由 (8.33) 描述的 QMI 区域 D，矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 D 稳定的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X 使得

$$M_{DQ}(A,X) = R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (XA) + R_{12}^{\mathrm{T}} \otimes (A^{\mathrm{T}}X) + R_{22} \otimes (A^{\mathrm{T}}XA) < 0 \tag{8.34}$$

证明 在此，仅证明充分性。

假设存在矩阵 X 满足 (8.34)。设 λ 是 A 的特征值，$v \in \mathbb{C}^n$ 是 $Av = \lambda v$ 的非零特征向量。应用矩阵 Kronecker 乘积的性质可知

$$\begin{aligned}
&(I \otimes v)^{\mathrm{H}} M_{DQ}(A,X)(I \otimes v)\\
=&(I \otimes v)^{\mathrm{H}}(R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (XA) + R_{12}^{\mathrm{T}} \otimes (A^{\mathrm{T}}X) + R_{22} \otimes (A^{\mathrm{T}}XA))(I \otimes v)\\
=&R_{11} \otimes (v^{\mathrm{H}}Xv) + R_{12} \otimes v^{\mathrm{H}}XAv + R_{12}^{\mathrm{T}} \otimes v^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{T}}Xv + R_{22} \otimes v^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{T}}XAv\\
=&v^{\mathrm{H}}Xv(R_{11} + \lambda R_{12} + \lambda^{\mathrm{H}}R_{12}^{\mathrm{T}} + \lambda\lambda^{\mathrm{H}}R_{22})\\
=&v^{\mathrm{H}}Xvf_{DQ}(\lambda)
\end{aligned}$$

由 $M_{DQ}(A,X) < 0$ 和 $X > 0$ 可以推出 $f_{DQ}(\lambda) < 0$，即 $\lambda \in D$。由 $\lambda \in \sigma(A)$ 的任意性可知，矩阵 A 是 D 稳定的。 □

8.5 注 记

本章内容由文献 [1] 的第 3 章，文献 [2] 的第 3、第 4、第 6 章，文献 [3] 的第 1、第 5 章等内容改写。

8.6 习 题

1. 考虑二阶系统

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

其中 $\omega = 1$，$\zeta = 0.1$，$k = 10$。将该传递函数转换成状态空间形式，并求解 Γ_{ie}，Γ_{ep}，Γ_{ee}。验证对于单输入系统，$\Gamma_{\mathrm{ie}} = \Gamma_{\mathrm{ep}}$。

2. 考虑二阶系统 (8.19)，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

试求解 Λ_{ie}，Λ_{ep}，Λ_{ee} 和 Λ_{pp}。

3. 定理 8.7 给出了无控制输入情况下的 Γ_{pp} 求解算法，如果系统包含控制输入，即

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\omega(k) + B_u u(k) \\ z(k) &= Cx(k) + D\omega(k) + D_u u(k) \end{aligned}$$

其中 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，B_u，D_u 为适当维数的矩阵，试根据定理 8.7 求解相应的状态反馈控制器求解算法。如果

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 0.5, \quad D_u = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

求解状态反馈控制器，使得 Γ_{pp} 最小。

4. 考虑线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & -1.0880 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1711 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑如下的区域：

$$D_{\mathrm{QMI}} = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < -0.9, \ |s+1| < 1.1\}$$

试求该 QMI 区域的区域矩阵。同时设计状态反馈控制器使得该系统的极点位于该 QMI 内。

参 考 文 献

[1] 嵇小辅. 不确定线性系统鲁棒控制若干问题研究. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 2006.

[2] 俞立. 鲁棒控制 —— 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[3] 周武能. 区域稳定约束鲁棒控制理论及应用. 北京: 科学出版社, 2009.

第 9 章　不确定线性系统的鲁棒控制

为了系统分析与综合的方便，复杂的动态系统常用简单的模型外加不确定环节来表示。本章介绍一类典型的不确定系统，其标称模型为线性定常系统，不确定环节为范数有界型。针对这类不确定线性系统及典型干扰，讨论鲁棒控制方法。

9.1　不确定线性系统的二次稳定性

考虑不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x(t) \tag{9.1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量，$A(\delta)$ 是未知参数 $\delta \in \Delta$ 的函数。如果 δ 是定常未知参数，这时系统 (9.1) 是一个线性定常系统，可以通过判断矩阵 $A(\delta)$ 的特征值是否位于左半平面的方法来判断系统 (9.1) 的鲁棒稳定性。如果 $A(\delta)$ 是未知的，且是时间 t 的函数，即 $\delta = \delta(t)$，这时系统 (9.1) 就是线性时变系统，需要采用 Lyapunov 定理来判断该系统是否鲁棒稳定。引入如下定义。

定义 9.1　如果存在对称正定矩阵 P，使得对所有的 $\delta \in \Delta$，矩阵不等式

$$A^{\mathrm{T}}(\delta)P + PA(\delta) < 0 \tag{9.2}$$

成立，则称系统 (9.1) 是二次稳定的。

很显然，如果系统是二次稳定的，则 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$ 是系统 (9.1) 的一个二次型 Lyapunov 函数，且满足

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t} = x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}(\delta)P + PA(\delta))x(t) < 0$$

根据 Lyapunov 稳定性定理 7.3，系统 (9.1) 对应所有的 $\delta \in \Delta$ 是渐近稳定的。即由二次稳定性可以推出鲁棒稳定性，但反之不一定成立。因为二次稳定性要求对于所有的不确定参数 $\delta \in \Delta$，存在公共的 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$，这个要求是相当保守的。

一般而言 Δ 是一个无穷集，根据定义 9.1，验证系统 (9.1) 的鲁棒稳定性需要验证无穷多个矩阵不等式的可行性，这在具体控制系统分析与设计时显然是不可能的。下面针对不同的不确定性描述，给出判断系统鲁棒稳定性的数值方法。

如果矩阵 $A(\delta)$ 形式为

$$A(\delta) = A + DF(t)E$$

其中 A，D，E 为已知的定常矩阵，$F(t)$ 为满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 的未知矩阵。这时代入系统的不确定描述，系统二次稳定的充要条件是

$$(A+DF(t)E)^{\mathrm{T}}P+P(A+DF(t)E)<0$$

该不等式对所有的 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$ 的 $F(t)$ 都成立，当且仅当存在标量 $\varepsilon>0$ 使得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+\varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$$

在该不等式两边均乘以 ε，将 εP 用 P 代替，并应用 Schur 补引理，得如下定理。

定理 9.1 系统 (9.1) 是二次稳定的，当且仅当存在对称正定矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA & PD & E^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}}P & -I & 0 \\ E & 0 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{9.3}$$

可以看出，(9.3) 是系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+D\omega(t) \\ z(t) &= Ex(t) \end{aligned} \tag{9.4}$$

的 H_∞ 范数小于 1 的充分必要条件。这一结果也可以由小增益定理得到。

如果矩阵 $A(\delta)$ 形式为

$$A(\delta)=\delta_1(t)A_1+\delta_2(t)A_2+\cdots+\delta_k(t)A_k$$

其中 $\sum_{i=1}^{k}\delta_i(t)=1$，$\delta_i(k)\geqslant 0$，$A_i$，$(i=1,2,\cdots,k)$ 是已知矩阵，这时有以下定理。

定理 9.2 系统 (9.1) 是二次稳定的，当且仅当存在对称正定矩阵 P 满足

$$A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i<0,\quad i=1,2,\cdots,k \tag{9.5}$$

证明 代入不确定性描述，得到系统二次稳定的充分必要条件是

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_i(t)A_i\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_i(t)A_i\right)<0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}\delta_i(t)(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i)<0$$

显然，该条件成立的充分必要条件是式 (9.5) 成立。 □

9.2 参数依赖 Lyapunov 稳定性

二次稳定性要求对于所有的参数不确定性，存在一个公共的 Lyapunov 函数，这在大部分场合都是相当保守的，特别是对于慢时变的不确定系统。本节采用参数依赖 Lyapunov 函数代替二次稳定中的公共 Lyapunov 函数来讨论系统的鲁棒稳定性条件，有望降低结论的保守性。

考虑系统 (9.1)，其中

$$A(\delta) = A_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i A_i \tag{9.6}$$

其中 $\delta \in \Delta$ 为系统的不确定参数，Δ 为超长方体，Δ_0 为集合 Δ 的顶点所组成的集合。

针对该不确定性，考虑参数依赖 Lyapunov 函数

$$V(x(t), \delta) = x^{\mathrm{T}}(t) P(\delta) x(t) \tag{9.7}$$

其中 $P(\delta)$ 为 δ 的一个矩阵值函数。为了讨论方便，假定矩阵 $P(\delta)$ 与 $A(\delta)$ 形式相同

$$P(\delta) = P_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i P_i \tag{9.8}$$

其中 $P_0, P_1, \cdots, P_k$ 为对称正定矩阵。很显然，如果

$$A^{\mathrm{T}} P(\delta) + P(\delta) A(\delta) < 0 \tag{9.9}$$

系统是鲁棒稳定的。

进一步分析可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V(x(t), \delta)}{\mathrm{d}t} &= x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}(\delta) P(\delta) + P(\delta) A(\delta)) x(t) \\ &= x^{\mathrm{T}}(t) L(\delta) x(t) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L(\delta) =& A^{\mathrm{T}}(\delta) P(\delta) + P(\delta) A(\delta) \\ =& \left(A_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i A_i\right)^{\mathrm{T}} \left(P_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i P_i\right) + \left(P_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i P_i\right) \left(A_0 + \sum_{i=0}^{k} \delta_i A_i\right) \\ =& A_0^{\mathrm{T}} P_0 + P_0 A_0 + \sum_{i=1}^{k} \delta_i (A_i^{\mathrm{T}} P_0 + P_0 A_i + A_0^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_0) \\ & + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_i \delta_j (A_j^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_j + A_i^{\mathrm{T}} P_j + P_j A_i) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i^2 (A_i^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_i) \end{aligned} \tag{9.10}$$

由于命题 “对于所有的$\delta \in \Delta_0$，$\frac{\mathrm{d}V(x(t), \delta)}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow$ 对所有的 $\delta \in \Delta_0$，$\frac{\mathrm{d}V(x(t), \delta)}{\mathrm{d}t} < 0$” 成立的一个充分必要条件是 $\frac{\mathrm{d}V(x(t), \delta)}{\mathrm{d}t}\big|_{\delta=\delta_0} < 0$，且 $\frac{\mathrm{d}V(x(t), \delta)}{\mathrm{d}t}$ 关于 δ_i 是

凸的，这等价于

$$\frac{\partial^2 V(x(t),\delta)}{\partial \delta_i^2} = x^{\mathrm{T}}(t)(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i)x(t) \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,k \tag{9.11}$$

由此可知，$\dfrac{\mathrm{d}V(x(t),\delta)}{\mathrm{d}t}$ 凸的充分条件是

$$x^{\mathrm{T}}(t)(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i)x(t) \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,k \tag{9.12}$$

总结以上讨论，有如下定理。

定理 9.3 考虑系统 (9.1)，其中 $A(\delta)$ 为式 (9.6) 所示。系统是仿射二次稳定的，如果存在对称正定矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 使得对所有的 $\delta\in\Delta_0$

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}(\delta)P(\delta)+P(\delta)A(\delta)<0 \\ &A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i\geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,k \end{aligned} \tag{9.13}$$

9.3 不确定线性系统的保性能控制

考虑如下的不确定离散线性系统:

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k) \tag{9.14}$$

其中 $x(k)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(k)\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入向量。$x_0=x(0)$ 为初始状态。A 和 B 为适当维数的常数矩阵，ΔA 和 ΔB 为适当维数的未知矩阵，表示系统的不确定参数，具有如下形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF(k)[E_a \quad E_b]$$

其中 D，E_a，E_b 为已知的具有适当维数的常数矩阵，表示不确定参数的结构信息，$F(k)\in\mathbb{R}^{i\times j}$ 为时变的未知矩阵，满足范数有界条件 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$。

对于不确定离散线性系统 (9.14)，定义性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)+u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)) \tag{9.15}$$

其中 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$R\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为给定的对称正定矩阵。

我们引入如下定义。

定义 9.2 对不确定离散线性系统 (9.14) 和性能指标 (9.15)，如果存在控制律 $u^*(k)$ 和一个正数 J^*，使得对所有容许的不确定性，闭环系统是渐近稳定的，且闭环性能指标满足 $J\leqslant J^*$，则称 J^* 是不确定离散线性系统 (9.14) 的一个性能上界，$u^*(k)$ 称为不确定离散线性系统 (9.6) 的一个状态反馈保性能控制律。

可以看出，保性能控制律不仅保证了闭环系统的鲁棒稳定性，而且保证了闭环系统满足一定的鲁棒性能。

定理 9.4　不确定离散线性系统 (9.14) 是鲁棒稳定的，且满足 $J \leqslant J^*$，如果存在对称正定矩阵 P，矩阵 K 和标量 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} -P+\varepsilon DD^{\mathrm{T}} & (A+BK)P & 0 \\ P(A+BK)^{\mathrm{T}} & -P+P(Q+K^{\mathrm{T}}RK)P & P(E_a+E_bK)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (E_1+E_2K)P & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.16}$$

其中 $J_0 = x_0^{\mathrm{T}} P^{-1} x_0$。

证明　将状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$ 代入系统 (9.14) 得如下的闭环系统：

$$x(k+1) = (A+BK+DF(k)(E_a+E_bk))x(k) \tag{9.17}$$

定义 Lyapunov 函数为

$$V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)P^{-1}x(k) \tag{9.18}$$

其中 P 为对称正定矩阵。

沿着系统 (9.14) 的任意状态轨迹，对 Lyapunov 函数取前向差分，如果

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &:= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^{\mathrm{T}}(k)(A+BK+DF(k)(E_a+E_bK))^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+BK+DF(k) \\ &\quad \cdot (E_a+E_bK))x(k) - x^{\mathrm{T}}(k)P^{-1}x(k) \\ &< -x^{\mathrm{T}}(k)(Q+K^{\mathrm{T}}RK)x(k) \\ &< 0 \end{aligned} \tag{9.19}$$

则闭环系统是鲁棒稳定的，且有

$$x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k) < -\Delta V(x(k))$$

对该式从 $k=0$ 到 $k=\infty$ 求和，并利用闭环系统的渐近稳定性，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)) \leqslant x_0^{\mathrm{T}}P^{-1}x_0$$

可以看出式 (9.19) 对任意 $x(k)$ 都成立等价于

$$\begin{aligned} &(A+BK+DF(k)(E_a+E_bK))^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+BK+DF(k) \\ &\cdot(E_a+E_bK)) - P^{-1} + Q + K^{\mathrm{T}}RK < 0 \end{aligned}$$

在该不等式两边均乘以 P，并应用 Schur 补，进一步等价为

$$\begin{bmatrix} -P & (A+BK+DF(k)(E_a+E_bK))P \\ P(A+BK+DF(k)(E_a+E_bK))^{\mathrm{T}} & -P+P(Q+K^{\mathrm{T}}RK)P \end{bmatrix} < 0 \tag{9.20}$$

定义

$$X = \begin{bmatrix} -P & (A+BK)P \\ P(A+BK)^{\mathrm{T}} & -P+P(Q+K^{\mathrm{T}}RK)P \end{bmatrix}$$

则 (9.20) 可以重新写成

$$X + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} F(k) \begin{bmatrix} 0 & (E_a+E_bK)P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (E_a+E_bK)P \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}}(k) \begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

上式对任意的 $F^{\mathrm{T}}(k)F(k) \leqslant I$ 都成立的充分必要条件是存在标量 $\varepsilon > 0$ 满足

$$X + \varepsilon \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P(E_a+E_bK)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (E_a+E_bK)P \end{bmatrix} < 0$$

应用 Schur 补，上式等价于式 (9.16)。 □

定理 9.4 的系统性能指标依赖于初始状态 x_0，如 x_0 是一个满足 $E\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\} = I$ 的零均值随机向量，则性能指标的期望值满足

$$J^* = E\{J\} \leqslant E\left\{x_0^{\mathrm{T}}P^{-1}x_0\right\} = \mathrm{trace}(P^{-1}) \tag{9.21}$$

以下定理给出了状态反馈控制律设计方法。

定理 9.5 系统 (9.14) 存在保性能控制律，如果对称正定矩阵 P，矩阵 Y，常数 $\varepsilon > 0$ 满足如下的 LMI：

$$\begin{bmatrix} -P+\varepsilon DD^{\mathrm{T}} & AP+BY & 0 & 0 & 0 \\ (AP+BY)^{\mathrm{T}} & -P & (E_aP+E_bY)^{\mathrm{T}} & P & Y^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_aP+E_bY & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{9.22}$$

这时，状态反馈控制律为 $u^* = YP^{-1}x(k)$，相应的系统性能指标的上界为 $J^* \leqslant \mathrm{trace}(P^{-1})$。

证明 由 Schur 补引理，式 (9.22) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P+\varepsilon DD^{\mathrm{T}} & (A+BK)P & 0 & 0 & 0 \\ P(A+BK)^{\mathrm{T}} & -P & P(E_a+E_bK)^{\mathrm{T}} & P & (KP)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (E_a+E_bK)P & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & KP & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

引入 $KP = Y$ 即可。 □

9.4 不确定连续系统的鲁棒方差性能

系统设计、参数估计、模型降阶等方面的许多理论和方法都采用状态或输出具有一定的协方差矩阵来保证系统满足一定的性能指标，这种通过配置系统状态和输出协方差矩阵的控制方法，称为协方差控制。

考虑系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + B_\omega \omega(t) \tag{9.23}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入向量，$\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ 为具有单位协方差的零均值白噪声过程，且 $\omega(t)$ 与系统初始状态 $x(0)$ 不相关，A，B，B_ω 是适当维数的定常矩阵，ΔA, ΔB 为未知的不确定矩阵，具有以下形式：

$$[\,\Delta A \quad \Delta B\,] = MF(t)\,[\,N_a \quad N_b\,]$$

其中 M，N_a，N_b 为已知的定常矩阵，描述不确定参数的结构信息，$F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$ 为未知的不确定矩阵，满足范数有界条件 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$。

本节的鲁棒方差控制讨论如何设计状态控制律，使得闭环系统对于所有容许的不确定参数都满足：

(A1) 所有的系统极点都位于 $D(q,r)$，其中 $D(q,r)$ 是左半开复平面的中心在 $-q + \mathrm{j}0(q > 0)$、半径为 $r(r < q)$ 的圆盘；

(A2) $[X]_{ii} < \sigma_i^2$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中 σ_i 是给定的一组常数，$[X]_{ij}$ 是稳态状态方差矩阵 $X = \lim\limits_{t\to\infty} E(x(t)x^{\mathrm{T}}(t))$ 对角线上的第 i 个元素，$E(\cdot)$ 表示数学期望。

为了描述方便，首先考虑如下的无输入标称系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_\omega \omega(t) \tag{9.24}$$

对于该系统，我们有如下定理。

定理 9.6　对于给定的圆盘 $D(q,r)$ 和一组常数 $\sigma_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，若存在正定对称矩阵 P 满足如下的 LMI，则系统 (9.16) 满足性能指标 (A1) 和 (A2)

$$\begin{bmatrix} -rP & PA^{\mathrm{T}} + qP \\ AP + qP & -rP + qr^{-1}B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 \tag{9.25a}$$

$$[P]_{ii} < \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9.25b}$$

证明　可以看出 (9.25a) 等价于

$$\left(\frac{A + qI}{r}\right) P \left(\frac{A + qI}{r}\right)^{\mathrm{T}} - P + \frac{q}{r^2} B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}} < 0 \tag{9.26}$$

从而得到

$$\left(\frac{A+qI}{r}\right)P\left(\frac{A+qI}{r}\right)^{\mathrm{T}}-P<0$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可知，矩阵 $(A+qI)/r$ 的所有特征值都位于单位圆内，因此 A 的极点都位于圆盘 $D(q,r)$ 内。

同时，将 (9.26) 整理可得

$$AP+PA^{\mathrm{T}}+q^{-1}(APA^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)P)+B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}}<0 \tag{9.27}$$

进而得到

$$AP+PA^{\mathrm{T}}<0$$

因此系统 (9.24) 是渐近稳定的，从而系统的稳态状态方差矩阵 X 存在，且满足以下的 Lyapunov 方程：

$$AX+XA^{\mathrm{T}}+B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}}=0 \tag{9.28}$$

从 (9.27) 中减去 (9.28) 可得

$$A(P-X)+(P-X)A^{\mathrm{T}}+q^{-1}(APA^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)P)<0$$

由于 $APA^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)P>0$，故而 $X<P$，因此由 $[P]_{ii}<\sigma_i^2$ 可得 $[X]_{ii}<\sigma_i^2$。□

在定理 9.6 的基础上，考虑系统 (9.23)。将状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$ 代入式 (9.23) 可得闭环系统为

$$\dot{x}(t)=(A+BK+MFN_a+MFN_bK)x(t)+B_\omega\omega(t) \tag{9.29}$$

将式 (9.25) 中的 A 用 $(A+BK+MFN_a+MFN_bK)$ 代替并界定不确定项，并令 $Y=KP$，得如下定理。

定理 9.7 对于给定的圆盘 $D(q,r)$ 和一组常数 σ_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，若存在正定对称矩阵 P，矩阵 Y 和标量 $\varepsilon>0$ 满足如下的 LMI，则系统 (9.23) 满足性能指标 (A1) 和 (A2)

$$\begin{bmatrix} -rP & (AP+BY+rP)^{\mathrm{T}} & (N_aP+N_bY)^{\mathrm{T}} \\ AP+BY+qP & -rP+qr^{-1}B_\omega B_\omega^{\mathrm{T}}+\varepsilon MM^{\mathrm{T}} & 0 \\ N_aP+N_bY & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{9.30a}$$

$$[P]_{ii}<\sigma_i^2,(i=1,2,\cdots,n) \tag{9.30b}$$

则 $u(t)=YP^{-1}x(t)$ 是一个鲁棒方差控制律。

在实际工程应用中，具有最小能量的方差控制律更有意义，即使得性能指标

$$J(u) = \sup_K \left\{ \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))^{1/2} \right\}$$

最小化的鲁棒方差控制律，其中 R 是给定的正定矩阵。这时，考虑状态反馈控制律 $u(t) = YP^{-1}x(t)$ 的形式，并考虑 $X < P$，有

$$\begin{aligned} J^2(u) &= \sup\left\{\lim \mathrm{E}(x^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}Y^{\mathrm{T}}RYP^{-1}x(t))\right\} \\ &= \sup\left\{\mathrm{trace}(YPXP^{-1}Y^{\mathrm{T}}R)\right\} \\ &\leqslant \mathrm{trace}(SYP^{-1}Y^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}) \end{aligned}$$

其中 $R = S^{\mathrm{T}}S$。因此可以通过使得 $J^2(u)$ 的上界 $\mathrm{trace}(SYP^{-1}Y^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}})$ 最小化的方法来求取最小能量的状态控制律。

9.5 不确定线性系统的鲁棒 H_2 性能

考虑如下的不确定线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bp(t) + B_\omega \omega(t) \\ q(t) &= Cx(t) + Dp(t) \\ z(t) &= Mx(t) + Np(t) \\ p(t) &= \Delta(t)q(t) \end{aligned} \tag{9.31}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ 为外部扰动向量，$p(t)$ 和 $q(t)$ 是描述系统不确定性的外部信号，$\Delta(t)$ 为时变的模型不确定性，且满足范数有界条件 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I$，$A$，$B$，$B_\omega$，$C$，$D$，$M$，$N$ 为已知的定常矩阵。

由于系统含有不确定参数，系统为时变系统，不能再用传递函数的形式定义系统的 H_2 范数，为此，引入如下定义。

定义 9.3 定义线性二次型指标

$$\hat{J}_2(\Delta(t), \omega_0) = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t \tag{9.32}$$

其中 $z(t)$ 是系统在零初始条件和脉冲信号 $\omega(t) = \omega_0\delta(t)$ 激励下的被调输出。该指标反应了信号 $z(t)$ 的能量。系统的鲁棒 H_2 性能指标定义为

$$J_2 = \sup_{\Delta t, \omega_0} \left\{ \hat{J}(\Delta(t), \omega_0) : \|\omega_0\| \leqslant 1, \Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I \right\} \tag{9.33}$$

即最坏情况下的二次型性能指标值。

定理 9.8 系统 (9.31) 的鲁棒 H_2 性能指标 J_2 是有限的，且 $J_2 \leqslant \|B_\omega^{\mathrm{T}} P B_\omega\|$，如果存在正定对称矩阵 P 满足如下 LMI：

$$\begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm{T}}P & PB & C^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -I & D^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ C & D & -I & 0 \\ M & N & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.34}$$

证明 应用 Schur 补引理可知，LMI (9.34) 等价于

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm{T}}P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ M & N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C & D \\ M & N \end{bmatrix} < 0$$

在系统 (9.31) 中，取 $\omega(t) = \omega_0\delta(t)$，$x_0 = x(0)$。取 Lyapunov 函数为 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$，则沿系统 (9.31) 的任意状态轨迹都有

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} < 0$$

由此可得

$$\dot{V}(x(t)) < p^{\mathrm{T}}(t)p(t) - q^{\mathrm{T}}(t)q(t) - z^{\mathrm{T}}(t)z(t)$$

由于 $x(t) = 0$ 和 $\omega(t) = \omega_0\delta(t)$ 等价于 $x(0) = B_\omega\omega_0$ 和 $\omega(t) = 0$，在上式两边对时间 t 从 0 到 ∞ 积分，并利用系统的稳定性可得

$$\omega_0^{\mathrm{T}} B_\omega^{\mathrm{T}} P B_\omega \omega_0 > \int_0^\infty \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^\infty (q^{\mathrm{T}}(t)q(t) - p^{\mathrm{T}}(t)p(t))\mathrm{d}t$$

由于 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I$，有 $q^{\mathrm{T}}(t)q(t) - p^{\mathrm{T}}(t)p(t) \geqslant 0$ 成立。从而当 $\|\omega_0\| \leqslant 1$ 时

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t < \|B_\omega^{\mathrm{T}} P B_\omega\| \tag{9.35}$$

即系统的 H_2 性能小于 γ。 □

9.6 不确定线性系统的鲁棒 H_∞ 性能

考虑如下的不确定线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bp(t) + K\omega(t) \\ q(t) &= Cx(t) + Dp(t) + L\omega(t) \\ z(t) &= Mx(t) + Np(t) + H\omega(t) \\ p(t) &= \Delta(t)q(t) \end{aligned} \tag{9.36}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ 为外部扰动向量，$p(t)$ 和 $q(t)$ 是描述系统不确定性的外部信号，A，B，C，D，K，L，H，M，N 为适当维数的定常矩阵，$\Delta(t)$ 为时变的模型不确定性，满足范数有界条件 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t) \leqslant I$。

由于时变矩阵 $\Delta(t)$ 的存在，系统 (9.36) 是时变系统，这时引入如下定义。

定义 9.4　定义

$$\hat{J}_\infty(\Delta,\omega) = \int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t \tag{9.37}$$

其中 $z(t)$ 是系统 (9.36) 在零初始条件下有限能量扰动输入 $\omega(t)$ 的输出响应。这时，不确定系统 (9.36) 的鲁棒 H_∞ 性能指标定义为

$$J_\infty = \sup_{\omega,\Delta}\left\{\hat{J}_\infty(\Delta,\omega) : \|\omega\|_2 \leqslant 1, \Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I\right\} \tag{9.38}$$

即在所有允许的参数不确定性和有限能量扰动 ω 中 $\hat{J}_\infty(\Delta,\omega)$ 的最坏可能值。

定理 9.9　不确定系统 (9.36) 是鲁棒稳定的，且 H_∞ 性能指标是有限的，$J_\infty < \gamma$，如果存在对称正定矩阵 P 满足如下的 LMI:

$$\begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P & PB & PK & C^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -I & 0 & D^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ K^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & L^{\mathrm{T}} & H^{\mathrm{T}} \\ C & D & L & -I & 0 \\ M & N & H & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9.39}$$

证明　由 Schur 补引理可知

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P & PB & PK \\ B^{\mathrm{T}}P & -I & 0 \\ K^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \\ L^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D & L \\ M & N & H \end{bmatrix} < 0 \tag{9.40}$$

定义 $\xi = [x^{\mathrm{T}} \quad p^{\mathrm{T}} \quad \omega^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，可知 $\xi^{\mathrm{T}}\Psi\xi < 0$，展开得

$$2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) < p^{\mathrm{T}}(t)p(t) - q^{\mathrm{T}}(t)q(t) \leqslant 0$$

故而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)] + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^{\mathrm{T}}\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) < 0$$

在上式两边对时间 t 从 0 到 ∞ 积分并利用零初始条件和系统的稳定性，得

$$\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty \gamma^{\mathrm{T}}\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t \tag{9.41}$$

即 H_∞ 性能界为 γ。定理得证。 □

9.7 注 记

本章内容由文献 [1] 的第 7、第 8 章，文献 [2] 的第 5 章等内容改写。

9.8 习 题

1. 考虑二阶系统

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x(t)$$

其中 $a_{21}\in[-12,-1]$，$a_{22}\in[-0.7,-0.5]$。对给定的不确定参数允许变化范围，确定系统是否二次稳定。

2. 考虑不确定线性系统 (9.23)，其中

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B_\omega=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad M=0.4I,\quad N_a=0.4I,\quad N_b=I$$

设计状态反馈控制器，使得对于所有允许的不确定性，闭环系统的极点都位于圆盘 $D(3,2)$，且稳态状态方差满足 $[X]_{11}\leqslant 1$，$[X]_{22}\leqslant 4.5$，$[X]_{22}\leqslant 1$。

参 考 文 献

[1] 俞立. 鲁棒控制 —— 线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[2] 苏宏业, 褚健, 鲁仁全, 等. 不确定时滞系统的鲁棒控制理论. 北京: 科学出版社, 2007.

第 10 章 不确定时滞系统的鲁棒控制

工业过程中存在着大量的时滞现象，如长管道进料、信号测量滞后等。对于许多大时间常数系统，也常用小时间常数系统加纯滞后环节来近似，这些都可以归结为时滞系统。时滞的存在使得系统的分析与设计变得更加困难，时滞系统的研究也一直是控制界研究的热点问题之一。本章基于 Lyapunov 理论，采用 LMI 等工具，讨论不确定时滞系统的鲁棒状态反馈控制器设计问题。

10.1 线性时滞系统的稳定性分析

考虑如下的线性时滞系统：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-d, 0] \end{aligned} \tag{10.1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量，$d > 0$ 为系统的状态滞后时间，$\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的初始条件，A，A_d 为已知的定常矩阵。该系统的稳定性条件由以下定理给出。

定理 10.1 线性时滞系统 (10.1) 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，R 满足如下 LMI：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + R & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{10.2}$$

证明 若存在满足 (10.2) 的对称正定矩阵 P，R，则可以构造如下的 Lyapunov 泛函：

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s \tag{10.3}$$

则 $V(x_t)$ 是正定的，且满足

$$\lambda_{\min}(P)\|x(t)\|_2^2 \leqslant V(x_t) \leqslant (\lambda_{\max}(P) + d\lambda_{\max}(R))\|x(t)\|_c^2$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最大和最小特征值。

沿系统 (10.1) 的状态轨迹，将 $V(x_t)$ 对时间 t 求导，得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x^{\mathrm{T}}(t)P(Ax(t) + A_d x(t-d)) + x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-d)Rx(t-d) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + R & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式 (10.2) 存在标量 $\varepsilon > 0$ 使得 $\dot{V}(x_t) < -\varepsilon\|x(t)\|^2$，由 Lyapunov-Krasovskii 定理，系统 (10.1) 是渐近稳定的。 □

可以看出，定理 10.1 将判断时滞系统 (10.1) 的稳定性问题转换为 LMI (10.2) 的可行性问题，可以方便地使用 LMI 工具箱中 feasp 求解器来求解。

如果对矩阵 A_d 满秩分解

$$A_d = BD, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

其中 $m = \mathrm{rank}(A_d)$ 并构造 Lyapunov 泛函为

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)D^{\mathrm{T}}RDx(s)\mathrm{d}s \tag{10.4}$$

沿着系统 (10.1) 的状态轨迹对 $V(x_t)$ 求导，得如下的稳定性判据。

定理 10.2 线性时滞系统 (10.1) 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 满足如下的 LMI：

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + D^{\mathrm{T}}RD & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{10.5}$$

可以看出，式 (10.2) 的维数为 $2n$，而 LMI (10.5) 的维数为 $m+n$，具有更小的维数，有利于降低存储空间，减少计算时间。当然，如果 $\mathrm{rank}(A_d) = n$，则 $D = I$，这时二者等价。

在第 7 章提到，Lyapunov-Razumikhin 定理同样可以解决时滞系统的稳定性问题。为了应用 Lyapunov-Razumikhin 定理，我们构造如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \tag{10.6}$$

则可以获得如下的稳定性判据。

定理 10.3 线性时滞系统 (10.1) 是渐近稳定的，如果存在标量 $\alpha > 0$ 和正定对称矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -\alpha P \end{bmatrix} < 0 \tag{10.7}$$

证明 容易验证 $V(x(t))$ 满足

$$\lambda_{\min}(P)\|x(t)\|^2 \leqslant V(x(t)) \leqslant \lambda_{\max}(P)\|x(t)\|^2$$

对 $V(x)$ 沿系统 (10.1) 轨迹求导，可得

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(x(t))) = 2x^{\mathrm{T}}(t)P(Ax(t) + A_dx(t-d))$$

如果对任意的 $-d \leqslant \theta \leqslant 0$，都有 $V(x(t+\theta)) < pV(x(t))$ 成立，则可以得到

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &\leqslant 2x^{\mathrm{T}}(t)P(Ax(t)+A_dx(t-d))+\alpha(px^{\mathrm{T}}(t)Px(t)-x^{\mathrm{T}}(t-r)Px(t-r)) \\
&= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P+\alpha pP & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -\alpha P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由不等式 (10.7) 可知，对于充分小的 $\delta > 0$ 和 $p = 1+\delta$

$$
\begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P+\alpha pP & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -\alpha P \end{bmatrix} < 0
$$

成立，从而存在 $\varepsilon = \alpha\delta > 0$ 使得

$$
\dot{V}(x(t)) \leqslant -\varepsilon\|x(t)\|^2
$$

根据 Lyapunov-Razumikhin 定理，系统 (10.1) 是渐近稳定的。 □

容易看出，如果令 $R=\alpha P$，定理 10.1 与定理 10.3 完全等价。因此，本章主要采用 Lyapunov-Krasovskii 方法来讨论时滞系统的鲁棒控制问题。

针对离散系统，我们讨论如下系统：

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k)+A_dx(k-d) \\
x(k) &= \varphi(k), \quad -d \leqslant k \leqslant 0
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量，$d>0$ 为系统的整数状态滞后时间，$\varphi(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的初始条件，A，A_d 为已知的定常矩阵。构造 Lyapunov 泛函为

$$
V(x_k) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)+\sum_{i=k-d}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(i)Rx(i) \tag{10.9}
$$

其中 P，R 为对称正定矩阵。由此可得系统 (10.8) 的稳定性判据如下。

定理 10.4　离散时滞系统 (10.8) 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，R 满足

$$
\begin{bmatrix} -P+R & 0 & A^{\mathrm{T}}P \\ 0 & -R & A_d^{\mathrm{T}}P \\ PA & PA_d & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{10.10}
$$

证明　对该 Lyapunov 泛函沿着系统 (10.8) 的状态轨迹求取前向差分得到

$$
\begin{aligned}
\Delta V(x_k) &= V(x_{k+1})-V(x_k) \\
&= x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1)-x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)+x^{\mathrm{T}}(k)Rx(k)-x^{\mathrm{T}}(k-d)Rx(k-d) \\
&= \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -P+R+A^{\mathrm{T}}PA & A^{\mathrm{T}}PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}PA & -R+A_d^{\mathrm{T}}PA_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由 Schur 补引理，LMI (10.10) 成立，则一定存在标量 $\varepsilon > 0$ 使得 $\Delta V(x_k) < -\varepsilon\|x(k)\|^2$，从而系统渐近稳定。 □

不等式 (10.10) 为严格 LMI，可以使用 LMI 工具箱 feasp 求解器求解。

10.2 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒控制

定理 10.1 和定理 10.4 分别给出了连续时滞系统与离散时滞系统的稳定性判据。从定理中可以看出，系统的稳定性与滞后时间 d 无关，即，稳定性条件对所有的滞后时间 d 都成立，适用于处理不确定滞后时间或滞后时间未知的时滞系统。如果已知滞后 d 的某些信息，则可以讨论稳定性与滞后时间 d 的关系，即时滞依赖稳定性判据，对于某些 d 值，系统是稳定的，而对某些 d 值，系统则是不稳定的。一般说来，时滞无关稳定性条件相对保守，因为时滞无关稳定性条件对任意大的滞后时间都成立，但也不绝对。在分析与设计中，这两类稳定性条件各有优点，不可替代。

10.2.1 不确定连续时滞系统的鲁棒控制

考虑如下的不确定线性时滞系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t) + (A_d+\Delta A_d)x(t-d) + (B+\Delta B)u(t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t\in[-d,0] \end{aligned} \tag{10.11}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 为输入向量，$d>0$ 为状态滞后，$\varphi(t)$ 为初始状态，A，A_d，B 为已知定常矩阵，ΔA，ΔA_d，ΔB 为未知的不确定参数矩阵，且满足

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B] = MF(t)[N_a \quad N_d \quad N_b]$$

其中 M，N_a，N_d，N_b 为已知矩阵，$F(t)$ 为未知矩阵，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$。

对于系统 (10.11)，我们讨论如何设计一个状态反馈控制器 $u(t)=Kx(t)$，使得闭环系统对于所有的不确定性都是渐近稳定的，为此引入如下定义。

定义 10.1 不确定线性时滞系统 (10.11) 是鲁棒稳定的，如果该系统在 $u(t)=0$ 时，对任意容许的不确定参数 $F(t)$，系统都是渐近稳定的。

定义 10.2 不确定线性时滞系统 (10.11) 是鲁棒可镇定的，如果存在状态反馈控制器 $u(t)=Kx(t)$ 使得闭环系统对所有容许的不确定参数 $F(t)$ 都是渐近稳定的。这时，$u(t)=Kx(t)$ 称为是鲁棒反馈控制器。

在给出系统鲁棒可镇定判据之前，我们首先讨论无输入标称系统 (10.11)，即系统 (10.1) 的时滞依赖稳定性问题。

定理 10.5　给定标量 $d^* > 0$，线性时滞系统 (10.1) 对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的任意时滞 d 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，Z，对称矩阵 X 与矩阵 Y 满足

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & PA_d - Y & d^* A^{\mathrm{T}} Z \\ A_d^{\mathrm{T}} P - Y^{\mathrm{T}} & -Q & d^* A_d^{\mathrm{T}} Z \\ d^* ZA & d^* ZA_d & -d^* Z \end{bmatrix} < 0 \tag{10.12a}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.12b}$$

其中 $\Xi_{11} = PA + A^{\mathrm{T}}P + Y + Y^{\mathrm{T}} + d^* X + Q$

证明　由 Newton-Leibuniz 公式可知

$$x(t) - x(t-d) = \int_{t-d}^{t} \dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10.13}$$

由此，系统 (10.1) 可以重新写成

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-d}^{t} \dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10.14}$$

构造 Lyapunov 泛函为

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) \tag{10.15}$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\ V_2(x_t) &= \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s \\ V_3(x_t) &= \int_{-d}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(\theta)Z\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s \end{aligned}$$

则 $V_1(x_t)$ 沿系统 (10.1) 的轨迹对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= 2x^{\mathrm{T}}(t)P(A + A_d)x(t-d) - \int_{t-d}^{t} 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_d\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant x^{T}(t)(PA + A^{\mathrm{T}}P + dX + Y + Y^{\mathrm{T}})x(t) - 2x^{\mathrm{T}}(t)(Y - PA_d)x(t-d) \\ &\quad + \int_{t-d}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

这里利用了 Moon 不等式来界定交叉项

$$-2x^{\mathrm{T}}(t)PA_d\dot{x}(t) \leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & Y - PA_d \\ Y^{\mathrm{T}} - A_d^{\mathrm{T}}P & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

其中 X，Y，Z 满足式 (10.12b)。

将 $V_2(x_t)$ 与 $V_3(x_t)$ 对时间 t 求导得

$$\dot{V}_2(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d)$$

$$\dot{V}_3(x_t) = d\dot{x}(t)Z\dot{x}(t) - \int_{t-d}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

综合 $\dot{V}_1(x_t)$，$\dot{V}_2(x_t)$，$\dot{V}_3(x_t)$ 可到

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \\ &\leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Xi' \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中

$$\Xi' = \begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm{T}}P + Y + Y^{\mathrm{T}} + dX + Q & PA_d - Y \\ A_d^{\mathrm{T}}P - Y^{\mathrm{T}} & dZ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ A_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}$$

由 Schur 补引理可知，式 (10.12a) 保证了 $\Xi' < 0$，从而 $\dot{V}(x_t) < 0$，系统 (10.1) 渐近稳定。 □

从定理 10.5 的证明过程可知，讨论时滞系统的时滞依赖稳定判据的基本思路是，首先将时滞系统通过模型转换，变成含有分布时滞的形式，再构造一个合适的 Lyapunov 泛函，对 Lyapunov 泛函沿系统状态轨迹求导，并将含有分布时滞的交叉项当作扰动通过不等式界定。因此，不同的交叉项界定方法与模型转换方法将给出不同的稳定性判据，并具有不同的保守性。

例如，如果构造系统 (10.1) 的 Lyapunov 泛函为

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s) + \int_{-d}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}(\theta)A_d^{\mathrm{T}}XA_d\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s \tag{10.16}$$

其中 P，Q，X 为对称正定矩阵。对 $V(x_t)$ 求导并通过 Park 不等式放大交叉项

$$-2x^{\mathrm{T}}(t)PA_d\dot{x}(s) \leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P(M^{\mathrm{T}}X + I)X^{-1}(XM + I)P & PM^{\mathrm{T}}XA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}XMP & A_d^{\mathrm{T}}XA_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}$$

并引入 $W = XMP$，$V = dX$，得系统 (10.1) 的另一个时滞稳定性判据为：给定标量 $d^* > 0$，线性时滞系统 (10.1) 对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的任意滞后时间 d 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，V 和矩阵 W 满足

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & -W^{\mathrm{T}}A_d & A^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}}V & d^*(W+P) \\ -A_d^{\mathrm{T}}W & -Q & A_d^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}}V & 0 \\ VA_dA & VA_dA_d & -V & 0 \\ d(W+P) & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

其中 $\Omega_{11}=(A+A_d)^{\mathrm{T}}P+P(A+A_d)+W^{\mathrm{T}}A_d+A_d^{\mathrm{T}}W+Q$。

在定理 10.5 基础上，很容易给出时滞依赖鲁棒稳定性条件如下。

定理 10.6　考虑系统 (10.11)，其中 $u(t)=0$。给定 $d^*>0$，该系统对满足 $0\leqslant d\leqslant d^*$ 的时滞 d 是鲁棒稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，Z，对称矩阵 X 与矩阵 Y 满足 (10.18) 和 (10.12b)，

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & PA_d-Y & d^*A^{\mathrm{T}}Z & PM & N_a^{\mathrm{T}} \\ A_d^{\mathrm{T}}P-Y^T & -Q & d^*A_d^{\mathrm{T}}Z & 0 & N_d^{\mathrm{T}} \\ d^*ZA & d^*ZA_d & -d^*Z & d^*ZM & 0 \\ M^{\mathrm{T}}P & 0 & d^*M^{\mathrm{T}}Z & I & 0 \\ N_a & N_d & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{10.18}$$

其中 Ξ_{11} 与式 (10.12) 中定义相同。

证明　由定理 10.5，将式 (10.12) 中 A 与 A_d 分别用 $A+\Delta A$ 与 $A_d+\Delta A_d$ 代替，得系统 (10.11) 是鲁棒稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，Z 和对称矩阵 X 满足式 (10.19) 与式 (10.12b)

$$\bar{\Xi}=\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & P(A_d+\Delta A_d)-Y & d^*(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}Z \\ (A_d+\Delta A_d)^{\mathrm{T}}P-Y^{\mathrm{T}} & -Q & d^*(A_d+\Delta A_d)^{\mathrm{T}}Z \\ d^*Z(A+\Delta A) & d^*Z(A_d+\Delta A_d) & -d^*Z \end{bmatrix}<0 \tag{10.19}$$

其中 $\bar{\Xi}_{11}=P(A+\Delta A)+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P+Y+Y^{\mathrm{T}}+d^*X+Q$。

代入 ΔA 与 ΔA_d 的表达式，可知 $\bar{\Xi}$ 可以分解成标称项与不确定项之和

$$\bar{\Xi}=\Xi+\Phi F(t)\Psi+\Psi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}<0$$

其中

$$\Phi=\begin{bmatrix} PH \\ 0 \\ d^*ZM \end{bmatrix},\quad \Psi=[N_a \quad N_d \quad 0]$$

由此可知 $\bar{\Xi}<0$ 的充分必要条件是存在一个标量 $\varepsilon>0$ 使得

$$\Xi+\varepsilon\Phi\Phi^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi<0$$

在该不等式两边都乘以 ε，将 εP，εQ，εZ，εY 用 P，Q，Z，Y 代替，并运用 Schur 补引理，可得式 (10.18)。 □

进一步，由定理 10.6 容易得出以下的鲁棒控制器设计算法。

定理 10.7　给定标量 $d^*>0$，系统 (10.11) 对满足 $0\leqslant d\leqslant d^*$ 的任意时滞 d 是鲁棒可镇定的，如果存在对称正定矩阵 $\bar{P}$，$\bar{Q}$，$\bar{Z}$，对称矩阵 $\bar{X}$，与矩阵 L，$\bar{Y}$ 满足

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & A_d\bar{P} - \bar{Y} & d^*(A\bar{P} + BL)^{\mathrm{T}} & M & (N_a\bar{P} + N_bL)^{\mathrm{T}} \\ \bar{P}A_d^{\mathrm{T}} - \bar{Y} & -\bar{Q} & d^*\bar{P}A_d^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{P}N_d^{\mathrm{T}} \\ d^*(A\bar{P} + BL) & d^*A_d\bar{P} & -d^*\bar{Z} & d^*M^{\mathrm{T}} & 0 \\ M^{\mathrm{T}} & 0 & d^*M^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ N_a\bar{P} + N_bL & N_d\bar{P} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10.20a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ \bar{Y}^{\mathrm{T}} & \bar{P}\bar{Z}^{-1}\bar{P} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.20b}$$

其中 $\Theta_{11} = A\bar{P} + \bar{P}A + BL + L^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \bar{Y} + \bar{Y}^{\mathrm{T}} + d^*\bar{X} + \bar{Q}$。

这时，状态反馈鲁棒控制器为

$$u(t) = LP^{-1}x(t)$$

证明 将状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 代入到系统 (10.11)，得到如下的闭环系统：

$$\dot{x}(t) = (A + BK + MF(t)(N_a + N_b))x(t) + (A_d + MF(t)N_d)x(t - d)$$

将 (10.19) 中 A 与 N_a 分别用 $A + BK$ 与 $N_a + N_bK$ 代替。在 (10.19) 的两边都乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, Z^{-1}, I, I\}$，在 (10.12b) 的两边都乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$，令 $\bar{P} = P^{-1}$，$\bar{Q} = P^{-1}QP^{-1}$，$\bar{X} = P^{-1}XP^{-1}$，$Y = P^{-1}YP^{-1}$，$L = KP^{-1}$，即得 (10.20)。 □

遗憾的是，(10.20b) 并不是 LMI，从而导致控制器设计的困难。获得 LMI 的最简单的方法是直接令 $\bar{Z} = \bar{P}$，但是不可避免地引入了额外的保守性。如果引入额外的矩阵，可以给出如下的迭代求解算法，大大降低结论的保守性。

引入矩阵 $\bar{S}$ 满足 $\bar{P}\bar{Z}^{-1}\bar{P} \geqslant \bar{S}$，同时，由于 $\bar{P}\bar{Z}^{-1}\bar{P} \geqslant \bar{S}$ 等价于 $\bar{P}^{-1}\bar{Z}\bar{P}^{-1} \leqslant \bar{S}^{-1}$，从而 (10.20b) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ \bar{Y}^T & \bar{S} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{S}^{-1} & \bar{P}^{-1} \\ \bar{P}^{-1} & \bar{Z}^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0$$

令 $\bar{T} = \bar{S}^{-1}$，$\bar{J} = \bar{P}^{-1}$，$\bar{R} = \bar{Z}^{-1}$。从而可以得到如下的优化问题：

$$\left.\begin{array}{ll} \min & \mathrm{trace}(\bar{T}\bar{S} + \bar{J}\bar{P} + \bar{R}\bar{Z}) \\ \text{s.t.} & (10.20\text{a}) \\ & \begin{bmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ \bar{Y}^T & \bar{S} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{T} & \bar{J} \\ \bar{J} & \bar{R} \end{bmatrix} \geqslant 0 \\ & \bar{S} > 0, \bar{J} > 0, \bar{R} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \bar{S} & I \\ I & \bar{T} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{J} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{Z} & I \\ I & \bar{R} \end{bmatrix} \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{10.21}$$

如果上述优化问题的解是 $3n$，即 $\mathrm{trace}(\bar{T}\bar{S}+\bar{J}\bar{P}+\bar{R}\bar{Z})=3n$，则可以说 (10.11) 是鲁棒稳定的，且鲁棒反馈控制器为 $u(t)=LP^{-1}x(t)$。与 (10.20) 相比，(10.21) 虽然难以获得全局最优解，但是在计算上，要比 (10.20) 简单得多。实际上，基于线性化方法，有

算法 10.1　不等式 (10.20b) 的迭代求解算法。

Step 1　选择一个充分小的 d 满足 (10.20a) 和 (10.21)，令 $d_0=d$；

Step 2　选择一组可行解 $(\bar{P}_0,\bar{Q}_0,\bar{Z}_0,\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{T}_0,\bar{J}_0,\bar{R}_0)$ 满足 (10.20a) 和 (10.21)。令 $k^*=k$。

Step 3　对变量 $(\bar{P},\bar{Q},\bar{Z},\bar{X},\bar{Y},\bar{T},\bar{J},\bar{R})$，求解以下优化问题：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ \ \mathrm{trace}(\bar{T}_0\bar{S}+\bar{T}\bar{S}_0+\bar{J}_0\bar{P}+\bar{J}\bar{P}_0+\bar{R}_0\bar{Z}+\bar{R}\bar{Z}_0)\\&\ \ \mathrm{s.t.}\ \ (10.20\mathrm{a}),(10.21)\end{aligned}$$

Step 4　令 $\bar{P}_{k+1}=\bar{P}$，$\bar{J}_{k+1}=\bar{J}$，$\bar{S}_{k+1}=\bar{S}$，$\bar{T}_{k+1}=\bar{T}$，$\bar{R}_{k+1}=\bar{R}$，$\bar{Z}_{k+1}=\bar{Z}$

Step 5　如果 (10.20b) 满足，令 $d^*=d$，令 d 增加一定值后返回 Step 2。如果 (10.20b) 不满足，则得系统鲁棒可镇定的最大时滞为 d^*，退出迭代。否则令 $k=k+1$，返回 Step 3。

10.2.2　不确定离散时滞系统的鲁棒控制

目前时滞系统鲁棒镇定问题的研究大部分针对连续时间系统，离散时滞系统方面成果较少，主要原因是离散定常滞系统可以等价转化为高维无时滞的离散线性系统，这样可以借助于离散线性系统的控制律设计方法来设计控制律，而后者的研究已经非常成熟。但是当时滞未知时，这一方法不再有效。另一方面，采用这种方法时，控制律设计算法维数很高，增加了设计难度。本节考虑到这一问题，采用 Lyapunov 理论研究不确定离散时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定问题。

考虑以下不确定离散时滞系统：

$$\begin{aligned}x(k+1)&=(A+\Delta A)x(k)+(A_d+\Delta A_d)x(k-d)+(B+\Delta B)u(k)\\x(k)&=\varphi(k),\quad -d\leqslant k\leqslant 0\end{aligned}\tag{10.22}$$

其中 $x(k)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(k)\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入向量，A，A_d，B 为具有适当维数的常数矩阵，$d>0$ 为系统的状态滞后时间，$\varphi(k)\in\mathbb{R}^n$ 为系统的初始条件，ΔA，ΔA_d，ΔB 为适当维数的未知矩阵，表示系统的不确定性，并具有以下形式：

$$[\Delta A\quad \Delta A_d\quad \Delta B]=MF(k)[N_a\quad N_d\quad N_b]$$

其中 M，N_a，N_d，N_b 为适当维数矩阵，$F(k)$ 为未知矩阵，并满足范数有界条件

$$F^{\mathrm{T}}(k)F(k)\leqslant I$$

与连续时滞系统类似，我们给出无输入标称系统 (10.22)，即系统 (10.8) 的渐近稳定性条件。

定理 10.8 给定标量 $d^* > 0$，时滞系统 (10.8) 对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的任意时滞 d 是渐近稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，Z，对称半正定矩阵 X_{11}，X_{22} 及矩阵 X_{12}，N_1，N_2 满足

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & (A-I)^{\mathrm{T}}P & d^*(A-I)^{\mathrm{T}}Z \\ \Gamma_{12}^{\mathrm{T}} & \Gamma_{22} & A_d^{\mathrm{T}}P & d^*A_d^{\mathrm{T}}Z \\ P(A-I) & PA_d & -P & 0 \\ d^*Z(A-I) & d^*ZA_d & 0 & -d^*Z \end{bmatrix} < 0 \tag{10.23a}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & N_1 \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} & N_2 \\ N_1^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.23b}$$

其中

$$\Gamma_{11} = P(A-I) + (A-I)^{\mathrm{T}}P + N_1 + N_1^{\mathrm{T}} + Q + d^*X_{11}$$
$$\Gamma_{12} = PA_d + N_2^{\mathrm{T}} - N_1 + d^*X_{12}$$
$$\Gamma_{22} = -Q - N_2 - N_2^T + d^*X_{22}$$

证明 构造 Lyapunov 泛函为

$$V(x_k) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + \sum_{\theta=k-d}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta) + \sum_{\theta=-d}^{-1}\sum_{s=k+\theta}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(s)Zy(s) \tag{10.24}$$

其中 $y(s) = x(s+1) - x(s)$。

很显然，$y(s)$ 满足

$$x(k) = x(k-d) + \sum_{\theta-d}^{k-1} y(\theta)$$

对 $V(x_k)$ 沿系统 (10.8) 的状态轨迹求前向差分可得

$$\begin{aligned}\Delta V(x_k) = {} & x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) - x^{\mathrm{T}}(k-d)Qx(k-d) \\ & + \mathrm{d}y^{\mathrm{T}}(k)Zy(k) - \sum_{\theta=k-d}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(\theta)Zy(\theta) \\ = {} & 2x^{\mathrm{T}}(k)Py(k) + y^{\mathrm{T}}(k)Py(k) + \mathrm{d}y^{\mathrm{T}}(k)Zy(k) + x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) \\ & - x^{\mathrm{T}}(k-d)Qx(k-d) - \sum_{\theta=k-d}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(\theta)Zy(\theta)\end{aligned}$$

对于任意适当维数矩阵 N_1，N_2，式 (10.25) 成立

$$2\left(x^{\mathrm{T}}(k)N_1 + x^{\mathrm{T}}(k-d)N_2\right)\left(x(k) - x(k-d) - \sum_{\theta-d}^{k-1} y(\theta)\right) = 0 \tag{10.25}$$

另一方面，由 (10.23b) 可知 $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \geqslant 0$ 从而

$$\sum_{k-d^*}^{k-1} \xi^{\mathrm{T}}(k)X\xi(k) - \sum_{k-d}^{k-1} \xi^{\mathrm{T}}(k)X\xi(k) \geqslant 0$$

即

$$d^*\xi^{\mathrm{T}}(k)X\xi(k) - \sum_{k-d}^{k-1} \xi^{\mathrm{T}}(k)X\xi(k) \geqslant 0 \tag{10.26}$$

在 $\Delta V(x_k)$ 的左边考虑 (10.25) 和 (10.26)，得

$$\Delta V(x_k) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(k)\Gamma'\xi(k) - \sum_{\theta=k-d}^{k-1} \zeta^{\mathrm{T}}(\theta)X\zeta(\theta)$$

其中

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^{\mathrm{T}} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A-I)^{\mathrm{T}} \\ A_d^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (P + d^*Z)\,[\,A-I \quad A_d\,], \quad \zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ y(\theta) \end{bmatrix}$$

由 Schur 补引理可知，(10.23) 保证了 $\Gamma \leqslant 0$ 和 $X > 0$，从而 $\Delta V(x_k) < 0$，从而系统渐近稳定。 □

在定理 10.8 的基础上，容易得到系统 (10.22) 的鲁棒稳定性条件如下。

定理 10.9 考虑系统 (10.22)，其中 $u(k) = 0$。给定标量 $d^* > 0$，该系统对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的时滞 d 是鲁棒稳定的，如果存在对称正定矩阵 P，Q，Z，对称半正定矩阵 X_{11}，X_{22}，及矩阵 X_{12}，N_1，N_2 满足 (10.27) 和 (10.23b)，

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & (A-I)^{\mathrm{T}}P & d^*(A-I)^{\mathrm{T}}Z & PM & N_a^{\mathrm{T}} \\ \Gamma_{12}^{\mathrm{T}} & \Gamma_{22} & A_d^{\mathrm{T}}P & d^*A_d^{\mathrm{T}}Z & 0 & N_d^{\mathrm{T}} \\ P(A-I) & PA_d & -P & 0 & PM & 0 \\ d^*Z(A-I) & d^*ZA_d & 0 & -d^*Z & d^*ZM & 0 \\ M^{\mathrm{T}}P & 0 & M^{\mathrm{T}}P & d^*M^{\mathrm{T}}Z & -I & 0 \\ N_a & N_d & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10.27}$$

其中 Γ_{11}，Γ_{12}，Γ_{22} 与 (10.23) 相同。

证明 将 (10.23a) 中的 A 与 A_d 用 $A+\Delta A$ 与 $A_d+\Delta A_d$ 代入，并注意到 ΔA 与 ΔA_d 的表达式可知，系统鲁棒稳定的充分条件是存在对称正定矩阵 P，Q，Z，对称半正定矩阵 X_{11}，X_{22}，及矩阵 X_{12}，N_1，N_2 满足 (10.23b) 与

$$\Gamma + \Phi F(k)\Psi + \Psi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(k)\Phi^{\mathrm{T}} < 0 \tag{10.28}$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} PM \\ 0 \\ PM \\ d^*ZM \end{bmatrix}, \quad \Psi = [N_a \quad N_d \quad 0 \quad 0]$$

同时 (10.28) 对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}(k)F(k) \leqslant I$ 的 $F(k)$ 都成立的充分必要条件是存在一标量 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\Gamma + \varepsilon\Phi\Phi^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi < 0$$

在该不等式的两边都乘以 ε，并将 εP，εQ，εZ，εX_{11}，εX_{22}，εX_{12}，εN_1，εN_2 分别用 P，Q，Z，X_{11}，X_{22}，X_{12}，N_1，N_2 代换，并运用 Schur 补引理，可得 (10.23b) 和 (10.27)。 □

定理 10.10 给定标量 $d^* > 0$，系统 (10.22) 对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的时滞 d 是鲁棒可镇定的，如果存在对称正定矩阵 $\bar{P}$，$\bar{Q}$，$\bar{Z}$，对称半正定矩阵 $\bar{X}_{11}$，$\bar{X}_{22}$，及矩阵 $\bar{X}_{12}$，$\bar{N}_1$，$\bar{N}_2$，$\bar{Y}$ 满足

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & d^*\Pi_{13} & M & (N_a\bar{P}+N_b\bar{Y})^{\mathrm{T}} \\ \Pi_{12}^{\mathrm{T}} & \Pi_{22} & \bar{P}A_d^{\mathrm{T}} & d^*\bar{P}A_d^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{P}N_d^{\mathrm{T}} \\ \Pi_{13}^{\mathrm{T}} & A_d^{\mathrm{T}}\bar{P} & -\bar{P} & 0 & M & 0 \\ d^*\Pi_{13}^{\mathrm{T}} & d^*A_d\bar{P} & 0 & -\bar{Z} & M & 0 \\ M^{\mathrm{T}} & 0 & M^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ N_a\bar{P}+B\bar{Y} & N_d\bar{P} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10.29a}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \bar{N}_1 \\ \bar{X}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{X}_{22} & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_1^{\mathrm{T}} & \bar{N}_2^{\mathrm{T}} & \bar{P}\bar{Z}^{-1}\bar{P} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.29b}$$

其中

$$\Pi_{11} = (A-I)\bar{P} + \bar{P}(A-I)^{\mathrm{T}} + B\bar{Y} + \bar{Y}^{\mathrm{T}}B + \bar{N}_1 + \bar{N}_1^{\mathrm{T}} + \bar{Q} + d^*\bar{X}_{11}$$
$$\Pi_{12} = A_d\bar{P} + \bar{N}_2^{\mathrm{T}} - \bar{N}_1 + d^*\bar{X}_{12}$$
$$\Pi_{13} = (A\bar{P} - \bar{P} + B\bar{Y})^{\mathrm{T}}$$
$$\Pi_{22} = -\bar{Q} - \bar{N}_2 - \bar{N}_2^{\mathrm{T}} + d^*\bar{X}_{22}$$

这时，鲁棒反馈控制器为

$$u(k) = \bar{Y}\bar{P}^{-1}x(k)$$

证明　将 $u(k)=Kx(k)$ 代入到 (10.22) 得如下闭环系统：

$$x(k+1)=(A+BK+MF(k)(N_a+N_bK))x(k)+(A_d+MF(k)N_d)x(k-d)$$

因此，在 (10.23) 中的 A，N_a 分别用 $A+BK$ 与 N_a+N_bK 代换，在不等式 (10.23) 的两边都乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1},P^{-1},P^{-1},Z^{-1},I,I\}$，在 (10.23b) 的两边都乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1},P^{-1},P^{-1}\}$，并令 $\bar{P}=P^{-1}$，$\bar{Q}=P^{-1}QP^{-1}$，$\bar{Z}=Z^{-1}$，$\bar{X}_{11}=P^{-1}X_{11}P^{-1}$，$\bar{X}_{12}=P^{-1}X_{12}P^{-1}$，$\bar{X}_{22}=P^{-1}X_{22}P^{-1}$，$\bar{N}_1=P^{-1}N_1P^{-1}$，$\bar{N}_2=P^{-1}N_2P^{-1}$，$K\bar{P}=\bar{Y}$，则得 (10.29)。　□

为了求解 (10.29b)，一种简单的方法是直接令 $\bar{Z}=\bar{P}$。当然，也可以采用类似于算法 10.1 的迭代求解法来获得保守性更小的控制器设计算法。

10.3　不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

10.3.1　时滞系统的时滞无关 H_∞ 性能分析

考虑如下的线性时滞系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+A_dx(t-d)+B\omega(t)\\ z(t)&=Cx(t)+D\omega(t)\\ x(t)&=\varphi(t),\quad -d\leqslant t\leqslant 0\end{aligned}\tag{10.30}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量，$\omega(t)\in\mathbb{R}^p$ 为系统的外部扰动输入，$z(t)\in\mathbb{R}^q$ 为系统的被调输出，A，B，C，D 为已知的实常数矩阵，d 为状态滞后时间。

定义 10.3　系统 (10.30) 具有 H_∞ 性能 γ，如果对于给定常数 $\gamma>0$，系统 (10.30) 是渐近稳定的，且从扰动输入 $\omega(t)$ 到被调输出 $z(t)$ 传递函数的 H_∞ 范数不超过 γ，即在零初始条件 $x(t)=0$，$t\in[-d,0]$ 条件下，$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|\omega(t)\|_2$，$\forall\omega(t)\in\mathcal{L}_2[0,\infty]$。

可以看出，系统的 H_∞ 性能反应了系统对外部扰动的抑制能力。H_∞ 越小，系统对外部扰动的抑制能力越强，系统的性能越好。

以下定理给出了系统 (10.30) 具有 H_∞ 性能 γ 的条件。

定理 10.11　给定 $\gamma>0$，系统 (10.30) 具有 H_∞ 性能 γ，如果存在对称正定矩阵 P，Q 满足

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+Q & PA_d & PB & C^{\mathrm{T}}\\ A_d^{\mathrm{T}}P & -Q & 0 & 0\\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma I & D^{\mathrm{T}}\\ C & 0 & D & -\gamma I\end{bmatrix}<0\tag{10.31}$$

证明 针对系统 (10.30)，构造 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中 P，Q 为待定的对称正定矩阵。

由 (10.31) 可知

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + Q & PA_d \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} < 0$$

根据定理 10.1，系统 (10.31) 在 $\omega(t) = 0$ 时是渐近稳定的。

在零初始条件下，考虑性能指标

$$J(\omega) = \int_0^\infty \left(\gamma^{-1}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\right)\mathrm{d}t$$

则对于任意的 $\omega(t) \in \mathcal{L}_2[0,\infty]$，根据 Lyapunov 泛函的性质和零初始条件可知

$$\begin{aligned}
J(\omega) &= \int_0^\infty \left(\gamma^{-1}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) + \dot{V}(x_t)\right)\mathrm{d}t - V(x(\infty)) \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(\gamma^{-1}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) + \dot{V}(x_t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \Big(2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d) \\
&\quad + \gamma^{-1}(Cx(t) + D\omega(t))^{\mathrm{T}}(Cx(t) + d\omega(t)) - \gamma\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \xi^{\mathrm{T}}(t)\Xi\xi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中

$$\Xi = \begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm{T}}P + Q + \gamma^{-1}C^{\mathrm{T}}C & PA_d & PB + \gamma^{-1}C^{\mathrm{T}}D \\ A_d^{\mathrm{T}}P & -Q & 0 \\ B^{\mathrm{T}}P + \gamma^{-1}D^{\mathrm{T}}C & 0 & -\gamma I + \gamma^{-1}D^{\mathrm{T}}D \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

由于 Schur 补引理可知，(10.31) 等价于 $\Xi < 0$，从而 $J(\omega) < 0$，即

$$\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma^2 \int_0^\infty \omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

从而系统具有 H_∞ 性能 γ。 □

10.3.2 时滞系统的 H_∞ 控制器设计

考虑如下的不确定时滞系统：

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d) + (B + \Delta B)u(t) + B_\omega\omega(t) \\
z(t) &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{10.32}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输入向量，$\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ 为扰动输入向量，$z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为被调输出。$d > 0$ 为状态滞后时间。A，B，B_ω，C 为适当维数的常数矩阵。ΔA，ΔA_d，ΔB 为未知矩阵，表示系统的不确定参数，且具有以下形式：

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B] MF(t) [N_a \quad N_d \quad N_b]$$

其中 M，N_a，N_b，N_d 为已知的定常矩阵，$F(t)$ 为未知矩阵，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$。

首先给出无输入标称系统 (10.32) 的时滞依赖有界实引理。

定理 10.12　考虑系统 (10.32)，其中 $F(t) = 0$，$u(t) = 0$。给定 $d^* > 0$，$\gamma > 0$，该系统对任意 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的滞后 d 都是渐近稳定的，且具有 H_∞ 性能 γ，如果存在对称正定矩阵 P_1，S，$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^{\mathrm{T}} & R_3 \end{bmatrix}$，矩阵 P_2，P_3，$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}$ 满足

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & P_2^{\mathrm{T}} B_\omega & d^*(W_1^{\mathrm{T}} + P_1) & d^*(W_3^{\mathrm{T}} + P_2^{\mathrm{T}}) & -W_3^{\mathrm{T}} A_d & C^{\mathrm{T}} \\ * & \Xi_{22} & P_3^{\mathrm{T}} B_\omega & d^* W_2^{\mathrm{T}} & d^*(W_4^{\mathrm{T}} + P_3^{\mathrm{T}}) & -W_4^{\mathrm{T}} A_d & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -d^* R_1 & -d^* R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -d^* R_2^T & -d^* R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10.33}$$

其中

$$\Xi_{11} = (A_0 + A_d)^{\mathrm{T}} P_2 + P_2^{\mathrm{T}}(A + A_d) + (W_3^{\mathrm{T}} A_d + A_d^{\mathrm{T}} W_3) + S$$
$$\Xi_{12} = P_1 - P_2^{\mathrm{T}} + (A + A_d)^{\mathrm{T}} P_2 + A_d^{\mathrm{T}} W_4$$
$$\Xi_{22} = -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + d^* A_d^{\mathrm{T}} R_3 A_d$$

证明　引入向量 $y(t) = \dot{x}(t)$，无输入标称系统 (10.32) 可以写成

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ y(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + B_\omega \omega(t) \end{aligned} \tag{10.34}$$

即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ 0 &= -y(t) + (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-d}^{t} y(\tau) d\tau + B_\omega \omega(t) \end{aligned}$$

或者，等价地写成

$$E \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + A_d & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-d}^{t} y(\tau) \mathrm{d}\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\omega \end{bmatrix} \omega(t) \tag{10.35}$$

针对系统 (10.35)，构造 Lyapunov 泛函为

$$V(x_t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} EP \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau) S x(\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{-d}^{0}\int_{t+\tau}^{0} y^{\mathrm{T}}(s)A_d^{\mathrm{T}}R_3A_dy(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{10.36}$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ P_2 & P_3\end{bmatrix},\quad P_1>0,\quad S>0,\quad R_3>0$$

注意到

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} EP\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=x^{\mathrm{T}}(t)P_1x(t)$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} EP\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\right)=2x^{\mathrm{T}}(t)P_1\dot{x}(t)=2\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

定义系统的 H_∞ 性能指标为

$$J(\omega)=\int_0^{\infty}\left(z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\right)\mathrm{d}t \tag{10.37}$$

对 $V(x_t)$ 沿着系统 (10.32) 的轨迹对时间 t 求导得

$$\begin{aligned}
&z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(x_t)\\
&\quad=\xi^{\mathrm{T}}(t)\Xi\xi(t)+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-x^{\mathrm{T}}(t-d)Sx(t-d)\\
&\qquad-\int_{t-d}^{t} y^{\mathrm{T}}(\tau)A_d^{\mathrm{T}}R_3A_dy(\tau)\mathrm{d}\tau+\eta(t)
\end{aligned}$$

其中

$$\xi(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix},\quad \Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ B_\omega\end{bmatrix}\\ [0\quad B_\omega^T]P & -\gamma^2I\end{bmatrix}$$

$$\Xi_{11}=P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & I\\ A+A_d & -I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & I\\ A+A_d & -I\end{bmatrix}P+\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & dA_d^{\mathrm{T}}R_3A_d^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\eta(t)=-2\int_{t-d}^{t}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ A_d\end{bmatrix}y(s)\mathrm{d}s$$

由 Park 不等式可知

$$\begin{aligned}
\eta(t)\leqslant&\int_{t-d}^{t}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}R+I)R^{-1}(RM+I)P\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_{t-d}^{t} y^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau\,[0\quad A_d^{\mathrm{T}}]\,RMP\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&+\int_{t-d}^{t} y(\tau)\,[0\quad A_d^{\mathrm{T}}]\,R\begin{bmatrix}0\\ A_d\end{bmatrix}y(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

定义 $W = RMP = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}$，并分解 R 为 $R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix}$，运用 Schur 补引理可得 (10.32)。 □

我们考虑状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$。将 $u(t) = Kx(t)$ 代入到 (10.32)，并令 $F(t) = 0$ 可得标称闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + A_d x(t-d) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

因此，把 (10.33) A 用 $A + BK$ 代换，就可以利用定理 (10.12) 的结论来解决状态反馈控制器设计问题。

令

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = R{-1} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{11} & \bar{12} \\ \bar{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{R}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = S^{-1}$$

在 (10.22) 的两边都乘以 $\mathrm{diag}\{Q, I\}$，为了得到 LMI，令 $W = \epsilon I$，其中 ϵ 为常数，$KQ_1 = Y$。这时，可以得系统的反馈控制器设计算法如下。

定理 10.13　给定 $d^* > 0$，ϵ，$\gamma > 0$，时滞系统 (10.32) 在 $F(t) = 0$ 时对满足 $0 \leqslant d \leqslant d^*$ 的任意时滞 d 是可镇定的，且闭环系统具有 H_∞ 性能 γ，如果存在正定对称矩阵 Q_1，$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{11} & \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{R}_{22} \end{bmatrix}$，$\bar{S}$，矩阵 Q_2，Q_3，Y 满足

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & 0 & \delta\bar{R}_1 & \delta\bar{R}_2 & 0 & Q_1 & Q_1C^{\mathrm{T}} & 0 & d^*Q_2^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} \\ * & \Upsilon_{22} & B_\omega & \delta\bar{R}_2^{\mathrm{T}} & \delta\bar{R}_3 & \epsilon A_d\bar{S} & 0 & 0 & 0 & d^*Q_3^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -d^*\bar{R}_1 & -d^*\bar{R}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d^*\bar{R}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{S} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -d^*\bar{R}_1 & -d^*\bar{R}_2 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -d^*\bar{R}_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{10.38}$$

其中

$$\begin{aligned} &\delta = 1 + \epsilon \\ &\Upsilon_{11} = Q_2 + Q_2^{\mathrm{T}} \\ &\Upsilon_{12} = Q_3 - Q_2^{\mathrm{T}} + Q_1(A + A_d)^{\mathrm{T}} + \epsilon Q_1 A_d^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \\ &\Upsilon_{22} = -Q_3 - Q_3^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

这时，状态反馈控制器为

$$u(t) = YQ_1^{-1}x(t)\varPi$$

最后，考虑不确定参数 $F(t)$。将 (10.38) 中的 A，A_d 与 B 分别用 $A+\Delta A$，$\delta A_d+\Delta A_d$，$B+\Delta B$ 代换，得如下的鲁棒状态反馈控制器设计算法。

定理 10.14 给定 $d^*>0$，ϵ，$\gamma>0$，不确定时滞系统 (10.32) 对满足 $0\leqslant d\leqslant d^*$ 的任意时滞 d 是可镇定的，且闭环系统具有 H_∞ 性能 γ，如果存在正定对称矩阵 Q_1，$\bar{R}=\begin{bmatrix}\bar{R}_{11} & \bar{R}_{12}\\ \bar{R}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{R}_{22}\end{bmatrix}$，$\bar{S}$，矩阵 Q_2，Q_3，Y，标量 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$ 满足

$$\varPi=\begin{bmatrix}\varUpsilon & \varepsilon_1\varPi_2 & \varPi_3^{\mathrm{T}} & \varepsilon_2\varPi_4 & \varPi_5^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon_1\varPi_2^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0\\ \varPi_3 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0\\ \varepsilon_2\varPi_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0\\ \varPi_5 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix}<0 \tag{10.39}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\delta=1+\epsilon\\
&\varPi_{12}=\begin{bmatrix}0 & M^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&\varPi_{13}=\begin{bmatrix}0 & (N_a+N_d)Q_1+\epsilon N_dQ_1+N_bY & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&\varPi_{14}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
&\varPi_{15}=\begin{bmatrix}d^*N_dQ_2 & d^*N_dQ_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

这时，鲁棒状态反馈控制器为

$$u(t)=YQ_1^{-1}x(t)$$

证明 由 ΔA，ΔA_d，ΔB 的形式可知，系统是鲁棒可镇定的，如果

$$\varUpsilon+\varPi_2(t)\varPi_3+\varPi_3^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\varPi_2^{\mathrm{T}}+\varPi_4F(t)\varPi_5+\varPi_5^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\varPi_4<0$$

而该矩阵不等式成立的充分必要条件是存在标量 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$ 满足

$$\varUpsilon+\varepsilon_1\varPi_2\varPi_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1^{-1}\varPi_3^{\mathrm{T}}\varPi_3+\varepsilon_2\varPi_4\varPi_4^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2^{-1}\varPi_5^{\mathrm{T}}\varPi_5<0$$

运用 Schur 补引理，可得 (10.39)。 □

10.4 不确定离散时滞系统的保成本控制

考虑以下不确定离散时滞系统：

$$\begin{aligned}
x(k+1)&=(A+\Delta A)x(k)+(A_d+\Delta A_d)x(k-d)+(B+\Delta B)u(k)\\
x(k)&=\varphi(k),k\in[-d,0]
\end{aligned} \tag{10.40}$$

其中，$x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为输入向量，$d > 0$ 为整数时滞，A，A_d，B 为已知的定常矩阵。ΔA，ΔA_d，ΔB 为时变函数，表示系统的不确定性，并满足

$$[\,\Delta A \quad \Delta B\,] = E_1 F_1(k) [\,H_1 \quad H_3\,], \Delta A_d = E_2 F_2(k) H_2$$

其中 E_i，H_j，$(i = 1,2, j = 1,2,3)$ 为已知的具有适当维数的定常矩阵，不确定矩阵 $F_i(t)$ 满足以下的范数有界条件：

$$F_i^{\mathrm{T}}(k) F_i(k) \leqslant I, \quad i = 1,2$$

对于系统 (10.25)，定义如下的二次成本函数：

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right) \tag{10.41}$$

其中 Q 和 R 为给定的对称正定矩阵。

我们首先研究无输入情形，即 $u(k) = 0$。

定理 10.15　如果存在对称正定矩阵 P_1，S_1，S_2，矩阵 P_2，P_3，W_1，W_2，W_3，M_1，M_2，以及标量 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$ 使得以下 LMI 成立：

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & P_2^{\mathrm{T}} A_d - M_1 & P_2^{\mathrm{T}} E_1 & P_2^{\mathrm{T}} E_2 \\ \Omega_{12}^{\mathrm{T}} & \Omega_{22} & P_3^{\mathrm{T}} A_d - M_2 & P_3^{\mathrm{T}} E_1 & P_3^{\mathrm{T}} E_2 \\ A_d^{\mathrm{T}} P_2 - M_1^{\mathrm{T}} & A_d^{\mathrm{T}} P_3 - M_2^{\mathrm{T}} & -S_2 + \varepsilon_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ E_1^{\mathrm{T}} P_2 & E_1^{\mathrm{T}} P_3 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ E_2^{\mathrm{T}} P_2 & E_2^{\mathrm{T}} P_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{10.42a}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 & M_1 \\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & M_2^{\mathrm{T}} & S_1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.42b}$$

其中

$$\Omega_{11} = P_2^{\mathrm{T}}(A - I) + (A - I)^{\mathrm{T}} P_2 + dW_1 + M_1 + M_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 H_1^{\mathrm{T}} H_1 + S_2 + Q$$
$$\Omega_{12} = P_1 - P_2^{\mathrm{T}} + (A - I)^{\mathrm{T}} P_3 + dW_2 + M_2^{\mathrm{T}}$$
$$\Omega_{22} = -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + P_1 + dW_3 + dS_1$$

则对于所有容许的不确定性，系统是鲁棒稳定的，且成本函数满足

$$J \leqslant J_0 = x^{\mathrm{T}}(0) P_1 x(0) + \sum_{\theta=-d}^{-1} x^{\mathrm{T}}(\theta) S_2 x(\theta) + \sum_{\theta=-d+1}^{0} \sum_{s=-1+\theta}^{-1} y^{\mathrm{T}}(s) S_1 y(s) \tag{10.43}$$

其中 $y(s) = x(s+1) - x(s)$。

证明 为了符号描述方便，定义

$$A(k) = A + \Delta A(k), \quad A_d(k) = A_d + \Delta A(k)$$

则有

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + A_d(k)x(k-d) \\ &= (A(k) + A_d(k))x(k) - A_d(k) \sum_{\theta=k-d}^{k} y(\theta) \end{aligned}$$

很显然，上式等价于

$$0 = (A(k) + A_d(k) - I)x(k) - y(k) - A_d(k) \sum_{\theta=k-d}^{k} y(\theta) \tag{10.44}$$

定义 Lyapunov 泛函如下:

$$V(x_k) = x^{\mathrm{T}}(k)P_1x(k) + \sum_{\theta=k-d}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta) + \sum_{\theta=-d+1}^{0} \sum_{s=k-1+\theta}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(s)S_1y(s) \tag{10.45}$$

沿着系统 (10.40) 的状态轨迹，取 $V(x_k)$ 的前向差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) = & 2x^{\mathrm{T}}(k)P_1y(k) + x^{\mathrm{T}}(k)S_2x(k) + y^{\mathrm{T}}(k)(P_1 + hS_1)y(k) \\ & - x^{\mathrm{T}}(k-d)S_2x(t-h) - \sum_{\theta=k-d}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(\theta)S_1y(\theta) \end{aligned}$$

考虑到 (10.44)，有

$$\begin{aligned} 2x^{\mathrm{T}}(k)P_1y(k) &= 2\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}} \left\{ \begin{bmatrix} y(k) \\ (A(k) + A_d(k) - I)x(k) - y(k) \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\theta=k-d}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ A_d(k) \end{bmatrix} y(\theta) \right\} \end{aligned}$$

其中

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

使用 Moon 不等式界定交叉项

$$-2\eta^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}} \sum_{\theta=k-d}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ A_d(k) \end{bmatrix} y(\theta) \leqslant \sum_{\theta=k-d}^{k-1} \begin{bmatrix} \eta(k) \\ y(i) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} W & M - P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ A_d(k) \end{bmatrix} \\ * & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(k) \\ y(i) \end{bmatrix}$$

$$= d\eta^{\mathrm{T}}(k)W\eta(k) + 2\eta^{\mathrm{T}}(k)\left(M - P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d(k) \end{bmatrix}\right)(x(k) - x(k-d)) + \sum_{\theta=k-d}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(\theta)S_1 y(\theta)$$

其中 W，M，S_1 具有适当维数，且满足

$$\begin{bmatrix} W & M \\ M^{\mathrm{T}} & S_1 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

由此，可以得

$$\Delta V(x_k) \leqslant \eta^{\mathrm{T}}(k)\Psi\eta(k) + 2\eta^{\mathrm{T}}(k)\left(P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d(k) \end{bmatrix} - M\right)x(k-d) + x^{\mathrm{T}}(k-d)(\varepsilon_2 H_2^{\mathrm{T}}H_2 - S_2)x(k-d) - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)$$

其中

$$\Psi = P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & I \\ A-I & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A-I & -I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P + dW + [M \quad 0] + \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 H_1^{\mathrm{T}}H_1 + S_2 + Q & 0 \\ 0 & P_1 + dS_1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i^{-1}P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ E_i \end{bmatrix}[0 \quad E_i^{\mathrm{T}}]P$$

其中 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$ 为任意变量。

定义

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Psi & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - M \\ [0 \quad A_d^{\mathrm{T}}]P - M^{\mathrm{T}} & -S_2 + \varepsilon_2 H_2^{\mathrm{T}}H_2 \end{bmatrix}$$

则有

$$\Delta V(x_k) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(k)\Sigma\xi(k) - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)$$

分解 W 和 M 为

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

则由 Schur 补可知，(10.42a) 等价于 $\Sigma < 0$。因此有

$$\Delta V(x_k) \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2$$

从而

$$x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) \leqslant -\Delta V(x_k)$$

把该不等式两边累加求和，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) \leqslant V(x_0)$$

$$= x^{\mathrm{T}}(0)P_1x(0) + \sum_{\theta=-d}^{-1} x^{\mathrm{T}}(\theta)S_2x(\theta) + \sum_{\theta=-d+1}^{0}\sum_{s=-1+\theta}^{-1} y^{\mathrm{T}}(s)S_1y(s)$$

从而获得性能指标上界。 □

下面讨论控制器设计问题，目的是设计无记忆状态反馈控制器 $u(k) = Kx(k)$ 使得闭环系统是鲁棒稳定的，同时使得成本函数小于一给定值。

把控制器 $u(k) = Kx(k)$ 代入到 (10.40) 得到如下的闭环系统：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + BK + \Delta A(k) + \Delta B(k)K)x(k) + (A_d + \Delta A_d x(k))x(k-d) \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in [-d, 0] \end{aligned} \tag{10.46}$$

定理 10.16 如果给定标量 $\epsilon > 0$，存在对称正定矩阵 $\bar{P}_1$，$\bar{S}_1$，$\bar{S}_2$，矩阵 $\bar{W}_1$，$\bar{W}_2$，$\bar{W}_3$，$\bar{P}_2$，$\bar{P}_3$，$\bar{Y}$，和标量 $\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & 0 & 0 & \bar{P}_1 & \bar{\Omega}_{16} & \bar{P}_2^{\mathrm{T}} & h\bar{P}_2^{\mathrm{T}} & \bar{P}_1 & \bar{Y}^{\mathrm{T}} \\ * & \bar{\Omega}_{22} & (1-\epsilon)A_d\bar{S}_2 & 0 & 0 & 0 & \bar{P}_3^{\mathrm{T}} & d\bar{P}_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{S}_2 & \bar{S}_2H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{S}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{P}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -d\bar{S}_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{10.47a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_1 & \bar{W}_2 & 0 \\ \bar{W}_2^{\mathrm{T}} & \bar{W}_3 & \epsilon A_d\bar{S}_1 \\ 0 & \epsilon\bar{S}_1A_d^{\mathrm{T}} & \bar{S}_1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{10.47b}$$

其中

$$\bar{\Omega}_{11} = \bar{P}_2 + \bar{P}_2^{\mathrm{T}} + d\bar{W}_1$$
$$\bar{\Omega}_{12} = \bar{P}_1(A^{\mathrm{T}} + \epsilon A_d^{\mathrm{T}} - I) + \bar{Y}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} - \bar{P}_2^{\mathrm{T}} + \bar{P}_3 + d\bar{W}_2$$
$$\bar{\Omega}_{16} = \bar{P}_1H_1^{\mathrm{T}} + \bar{Y}^{\mathrm{T}}H_3$$

$$\bar{\Omega}_{22} = -\bar{P}_3 - \bar{P}_3^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i E_i E_i^{\mathrm{T}} + d\bar{W}_3$$

则闭环系统是鲁棒稳定的，同时成本函数满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{\mathrm{T}}(k) Q x(k) \leqslant V(x_0)$$

$$= x^{\mathrm{T}}(0) P_1 x(0) + \sum_{\theta=-d}^{-1} x^{\mathrm{T}}(\theta) S_2 x(\theta) + \sum_{\theta=-d+1}^{0} \sum_{s=-1+\theta}^{-1} y^{\mathrm{T}}(s) S_1 y(s)$$

其中 $y(\theta) = x(\theta+1) - x(\theta)$。此时，鲁棒反馈控制器为

$$u(k) = \bar{Y} \bar{P}_1^{-1} x(k)$$

证明　控制器 $u(k) = Kx(k)$ 保证闭环系统鲁棒稳定同时具有保成本性能的充分条件是 (10.42) 满足，其中，A 和 H_1 分别用 $A+BK$ 和 H_1+H_3K 代替。为了得到 LMI，我们令

$$M = \epsilon P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ -P_3^{-1} P_2 P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 ϵ 为给定常数。定义 $\bar{P}_1 = P_1^{-1}$，$\bar{P}_3 = P_3^{-1}$，$\bar{P}_2 = -\bar{P}_3 P_2 \bar{P}_1$，$\bar{Y} = K\bar{P}_1$，$W = P^{-\mathrm{T}} W P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & \bar{W}_2 \\ \bar{W}_2^T & \bar{W}_3 \end{bmatrix}$，$\bar{S}_1 = S_1^{-1}$，$\bar{S}_2 = S_2^{-1}$。 □

10.5　注　　记

本章内容由文献 [1] 的第 9 章、文献 [2] 的第 4、第 5、第 7 章，文献 [3] 的第 7 章，文献 [4]~[7] 等内容改写。

10.6　习　　题

1. 考虑时滞系统 (10.1)，其中参数矩阵取值如下：

$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -10 & \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

采用定理 10.1 验证系统是否时滞无关稳定，如果不是，采用定理 10.5 验证系统是否时滞依赖稳定，并求取最大时滞 d^*。

2. 考虑标称离散时滞系统 (10.22)，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

基于定理 10.8，计算保证系统稳定的最大时滞 d^*。

3. 考虑标称时滞系统 (10.32)，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-0.9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad B_\omega=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$$

基于定理 10.13，计算系统的稳定区间并计算 H_∞ 性能指标 γ。

4. 考虑系统 (10.40)，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0.01\\0.01&0.5\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad E_1=E_2=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix},$$

$$H_1=\begin{bmatrix}0.1&0.05\\-0.02&0.1\end{bmatrix},\quad H_2=0,\quad H_3=\begin{bmatrix}-0.2\\0.8\end{bmatrix},\quad d=1,$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}0.1\\-0.1\end{bmatrix},\quad x(-1)=\begin{bmatrix}0.1\\0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad R=1$$

试设计状态反馈保成本控制器，并计算成本上界 J_0。

参 考 文 献

[1] 俞立. 鲁棒控制 —— 线性矩阵不等式处理方法. 北京：清华大学出版社, 2001.

[2] 苏宏业, 褚健, 鲁仁全, 等. 不确定时滞系统的鲁棒控制理论. 北京：科学出版社, 2007.

[3] 何勇. 基于自由权矩阵的时滞相关鲁棒稳定与镇定. 长沙：中南大学博士学位论文, 2004.

[4] Chen W H, Guan Z H, Lu X. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. IEE Proceedings on Control Theory and Applications, 2003, 150(4): 412–416.

[5] Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(2): 253–270.

[6] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(4): 876–877.

[7] Moon Y, Park P, Kwon W, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. International Journal of Control, 2001, 74(14): 1447–1455.

第 11 章　奇异线性系统的鲁棒控制

本章介绍奇异线性系统鲁棒控制理论的基础知识，包括稳定性理论、H_2 范数、H_∞ 范数、LMI 方法以及一些有用的引理等。这些基础知识和基本概念为以后各章节的学习提供理论基础。

11.1　奇异标称系统解的可容许条件

与前面讲述的标称系统相比，奇异系统的特点在与状态矩阵的奇异性，从而导致了它的解存在非正则解与脉冲解。如果在研究奇异系统时，不考虑这些解，就不能保证系统的动态特性甚至是稳定性。为了排除这两种解，我们引进了解得可容许条件，即一个系统的解既是正则的，也是无脉冲的。本小节从频域和时域两个角度来分析解的可容许条件。

定义 11.1[1]　给出奇异标称自治系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{11.1}$$

其中 $x(t) \in R^n$, $E \in R^{n\times n}$, $A \in R^{n\times n}$，矩阵 E 是奇异的且 $\mathrm{rank}E = r \leqslant n$，如果系统 (11.1) 的解是正则、无脉冲的，则系统 (11.1) 的解是可容许的。

11.1.1　基于频域的可容许条件

首先，从频域的角度出发分析奇异标称系统 (11.1) 解的可容许条件。

定理 11.1　如果系统 (11.1) 满足 $|sE - A|$ 不恒等于 0, 则系统 (11.1) 存在正则解。

证明　对式 (11.1) 左右两边同时做拉氏变换，可得

$$sEx(s) - Ex(0) = Ax(s) \tag{11.2}$$

即

$$(sE - A)x(s) = Ex(0) \tag{11.3}$$

因为 $|sE - A|$ 不恒等于 0，根据拉氏反变换可知，$x(t)$ 有正则解。　□

定理 11.2　如果系统 (11.1) 满足 $\deg(|sE - A|) = \mathrm{rank}E$，则系统 (11.1) 没有脉冲解。

证明 由解的脉冲性条件，同时对式 (11.3) 进行拉氏反变换，即可得到：如果 $\deg(|sE-A|)=\text{rank}E$，则 $x(t)$ 没有脉冲摄动，即系统 (11.1) 没有脉冲解。 □

通过以上两个定理的总结可得，奇异系统 (11.1) 基于频域的可容许条件描述如下。

定理 11.3 如果系统 (11.1) 满足 $|sE-A|$ 不恒等于 0 和 $\deg(|sE-A|)=\text{rank}E$，则系统 (11.1) 解是可容许的。

证明 通过以上的定义与定理即可得证。 □

11.1.2 基于参数的可容许条件

在这里，我们将从另外一个角度，即系统的参数矩阵来考虑奇异标称系统解的可容许条件。首先，我们给出一些定义。

定义 11.2[2] 如果系统 (11.1) 满足 $|sE-A|\neq 0$，则矩阵对 $(E,\ A)$ 是正则的。

定义 11.3[3] 如果系统 (11.1) 满足 $\deg(|sE-A|)=\text{rank}E$，则矩阵对 $(E,\ A)$ 是无脉冲的。

定义 11.4[1] 如果系统 (11.1) 满足 $\deg(|sE-A|)=\text{rank}E$ 且 $|sE-A|\neq 0$，则矩阵对 $(E,\ A)$ 是可容许的。

定理 11.4[4] 如果系统 (11.1) 满足矩阵对 $(E,\ A)$ 是正则的，则系统 (11.1) 的解是正则的。

证明 根据定义 11.2 和定理 11.1，即可得证。 □

定理 11.5[4] 如果系统 (11.1) 满足矩阵对 $(E,\ A)$ 是无脉冲的，则系统 (11.1) 的解是无脉冲的。

证明 根据定义 11.4 和定理 11.3，即可得证。 □

定理 11.6 如果系统 (11.1) 满足矩阵对 $(E,\ A)$ 是可容许的，则系统 (11.1) 的解是可容许的。

证明 根据定义 11.1，定理 11.4 及定理 11.5，即可得证。 □

下面将从 Riccati 方程的角度，考虑基于参数矩阵的奇异标称系统解的可容许条件。

定理 11.7[5] 假定矩阵对 $(E,\ A)$ 是正则的，并且存在矩阵 C 使得矩阵对 $(E,\ A,\ C)$ 是可观的，则系统 (11.1) 的解是可容许的，当且仅当存在矩阵 $X\in R^{n\times n}$，使得下面的广义 Lyapunov 方程 (GLE) 有解：

$$E^{\mathrm{T}}X=X^{\mathrm{T}}E\geqslant 0$$

$$A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A+C^{\mathrm{T}}C=0$$

基于线性矩阵不等式，我们可以得到如下所示的定理。线性矩阵不等式是本书提到得最多的一个计算工具，这个结果对于本书以后的重要结果的得出扮演着重要作用。

定理 11.8[1]　系统 (11.1) 的解是可容许的，当且仅当存在矩阵 $X \in R^{n\times n}$，使得

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \\ A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A < 0 \end{aligned} \tag{11.4}$$

证明　充分性证明。假定式 (11.4) 有一个解 X，显然，从式 (11.4) 我们能得到矩阵 A, X 是非奇异的，因此，对于任意的非零复数 s，式 (11.5) 成立

$$|sE - A| = (-s)^n|A||\frac{1}{s}I - A^{-1}E| \tag{11.5}$$

显然，从等式 (11.5) 的右边我们可以看到它不恒为零，即矩阵对 $(E,\ A)$ 是正则的。其次，令 $L = -A^TX - X^{\mathrm{T}}A$，则矩阵 L 是非奇异的，由文献 [6] 知，矩阵对 $(E,\ A,\ L^{1/2})$ 是可观的，从定理 11.7 可知，矩阵对 $(E,\ A)$ 是无脉冲摄动的。由定理 11.4，定理 11.5 可得定理 11.8 的充分性成立。

(必要性) 从定理 11.7 可知，必要性是显然的。证毕。 □

定理 11.9[7]　考虑系统 (11.1)，如果矩阵对 $(E,\ A)$ 是可容许的，则存在两个非奇异正交矩阵 L_1, $L_2 \in R^{n\times n}$，使得

$$L_1EL_2 = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},\quad L_1AL_2 = \begin{bmatrix} A_{r\times r} & 0 \\ 0 & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

11.1.3　数值例子

下面将给出两个数值例子，分别分析基于频域和基于参数两种情况下的可容许条件。

例 11.1　考虑如下的奇异标称系统：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad t \geqslant 0 \tag{11.7}$$

由系统 (11.7)，可得如下的表达式：

$$\mathrm{rank}E = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

而

$$\deg(sE - A) = \deg\begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

比较上面两式可得

$$\mathrm{rank}E \geqslant \deg(sE - A)$$

根据定理 11.3，系统 (11.7) 存在脉冲解。事实上，我们可以把 (11.7) 表示成

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{x}_2(t) \\ x_2(t) = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{11.8}$$

通过求解方程 (11.8)，可得系统 (11.7) 的解为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2(0-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0$$

其中 $\delta(t)$ 为脉冲函数，具有如下的性质：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

综上可得，系统 (11.7) 存在脉冲解。而且，通过 MATLAB/LMI Toolbox 求解式 (11.4)，我们发现没有可行解存在，即找不到矩阵 X 使得式 (11.4) 成立，因此系统 (11.1) 没有同时正则与无脉冲的解存在，也验证了定理 11.8 是成立的。

例 11.2 考虑如下奇异标称的系统：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0 \tag{11.9}$$

求解系统解是否是可容许的。

首先，考虑系统 (11.9) 解的可容许性。由系统 (11.9) 可得

$$|sE - A| = 18s + 9 \neq 0 \ (s \neq -1/2)$$

因此矩阵对 $(E,\ A)$ 是正则的。

另外，由于系统 (11.9) 可知

$$\mathrm{rank}E = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = 1$$

同时

$$\deg(sE - A) = \deg\begin{bmatrix} s+1 & s \\ 8s-1 & 8s+9 \end{bmatrix} = \deg(18s + 9) = 1$$

于是

$$\mathrm{rank}E = \deg(sE - A)$$

所以矩阵对 $(E,\ A)$ 是无脉冲的，通过定理 11.6 可知，奇异系统 (11.9) 的解是可容许的。

现在我们用 MATLAB/LMI 工具箱，来验证定理 11.8。通过求解线性矩阵不等式可得

$$X = \begin{bmatrix} 0.2587 & -0.0014 \\ -0.0014 & 0.0379 \end{bmatrix}$$

此时

$$A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -0.5203 & 0.0521 \\ 0.0521 & -0.6814 \end{bmatrix} < 0$$

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E = \begin{bmatrix} 0.2473 & 0.3014 \\ 0.2473 & 0.3014 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

由此可得，定理 11.8 是成立的。

11.2　奇异标称系统的鲁棒稳定性及鲁棒可镇定条件

本节主要考虑如下的奇异标称系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{11.10}$$

其中 $x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^m$，$E \in R^{n\times n}$，$A \in R^{n\times n}$，矩阵 E 是奇异的且 $\mathrm{rank}E = r \leqslant n$。

11.2.1　奇异标称自治系统的鲁棒稳定性

通过前一小节的分析，可知与标称系统相比，奇异标称系统的解存在的非正则和有脉冲两种情况。因此奇异系统的稳定性分析师建立在系统解的可容许性的基础之上。如果奇异系统的解是可容许的，则我们就可以用以下两种方法来分析系统的稳定性：一种可以通过传统的 Lyapunov 方法；一种可以通过 Barbalat 引理。首先，给出两种稳定性的定义。

定义 11.5　如果奇异标称系统 (11.1) 满足

(1) 它的解在 $[0,\infty)$ 是可容许的；

(2) 它的解是 Lyapunov 渐近稳定的，

则奇异系统 (11.1) 是鲁棒稳定的。

定义 11.6　如果奇异标称系统 (11.1) 满足

(1) 它的解在 $[0,\infty)$ 是可容许的；

(2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$，总存在一个标量 $\delta > 0$ 以至于对于任意的平滑初始条件 $\phi(t)$，当 $\sup\limits_{-\tau \leqslant t \leqslant 0} \|\phi(t)\| \leqslant \delta$ 时，系统 (11.10) 的解满足

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$$

则奇异系统 (11.1) 也是鲁棒稳定的。

下面给出基于定义 11.6 得到的奇异标称系统的鲁棒稳定性条件。

定理 11.10 奇异标称系统 (11.1) 是鲁棒渐近稳定的，当且仅当存在一个正定对称的矩阵 P，使得如下不等式成立:

$$EP = PE^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{11.11a}$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA < 0 \tag{11.11b}$$

证明 充分性证明。由定理 11.8 可得系统的解是可容许的。根据定理 11.9 即可得到: 存在两个正交矩阵 L_1，$L_2 \in R^{n\times n}$，使得

$$\bar{E} = L_1 E L_2 = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = L_1 A L_2 = \begin{bmatrix} A_{r\times r} & 0 \\ 0 & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \tag{11.12}$$

设

$$\bar{P} = L_1^{-\mathrm{T}} P L_2 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

在等式 (11.11a) 两边同时左乘 L_2^{T}，右乘 L^2 得

$$L_2^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} L_1^{\mathrm{T}} L_1^{-\mathrm{T}} P L_2 = L_2^{\mathrm{T}} P L_1^{-1} L_1 E L_2 \tag{11.14}$$

由式 (11.12) 与 (11.13)，有

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ P_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{11.15}$$

从上式可得

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \ (P_{11} = P_{11}^{\mathrm{T}} \geqslant 0) \tag{11.16}$$

在不等式 (11.11b) 两边同时左乘 L_2^{T}，右乘 L^2，同时考虑式 (11.12) 与 (11.13) 得

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{P}\bar{A} < 0 \tag{11.17}$$

对 (11.17) 进行分块运算得

$$A_{r\times r}^{\mathrm{T}} P_{11} + P_{11} A_{r\times r} < 0 \tag{11.18}$$

在系统 (11.1) 两边同时乘上 L_1，有

$$L_1EL_2L_2^{-1}\dot{x}(t) = L_1AL_2L_2^{-1}x(t) \tag{11.19}$$

引入变量 $\xi(t)$，令

$$\xi(t) = L_2^{-1}x(t) \tag{11.20}$$

则系统 (11.1) 可以分解成如下的两个子系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = A_{r\times r}\xi_1(t) \\ 0 = \xi_2(t) \end{cases} \tag{11.21}$$

其中 $\xi_1(t) \in R^r$, $\xi_2 t \in R^{n-r}$. 对于系统 (11.21) 第一个子系统，选取如下 Lyapunov 函数

$$V(\xi_1(t)) = \xi_1^{\mathrm{T}}(t)P_{11}\xi_1 \tag{11.22}$$

由不等式 (11.18)，可知

$$\dot{V}(\xi_1(t)) = A_{r\times r}^{\mathrm{T}}P_{11} + P_{11}A_{r\times r} < 0 \tag{11.23}$$

由 Lyapunov 第二定理知

$$\lim_{t\to\infty}\xi_1(t) = 0 \tag{11.24}$$

考虑系统 (11.21) 的后一个子系统，及线性变换 (11.20)，得

$$\lim_{t\to\infty}x(t) = 0 \tag{11.25}$$

由定义 11.6 可知系统 (11.1) 是鲁棒稳定的。

通过文献 [5] 可得必要性。 □

鲁棒稳定性的研究得到了很多研究者的重视，并取得了很多经典的结果。下面我们给出具有代表性的结果，即从 Riccati 方程的角度给出了奇异标称系统 (11.1) 鲁棒稳定的条件。

推论 11.1[8]　奇异标称系统 (11.1) 是鲁棒稳定的当且仅当存在一个正定对称的矩阵 Q，使得矩阵 X 是如下 Riccati 方程的解

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \quad A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A + Q = 0 \tag{11.26}$$

下面，从 Lyapunov 方程的角度，给出了系统具有鲁棒稳定的条件。

定理 11.11[9]　奇异标称系统 (11.1) 是鲁棒渐近稳定的，如果存在一个正定对称的矩阵 Q 是如下不等式的解

$$E^{\mathrm{T}}Q = Q^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \quad A^{\mathrm{T}}QE + E^{\mathrm{T}}QA < 0 \tag{11.27}$$

证明 考虑如下的 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) \tag{11.28}$$

对其求导可得

$$\dot{V}(x(t)) = A^{\mathrm{T}}QE + E^{\mathrm{T}}QA < 0 \tag{11.29}$$

因此，系统 (11.1) 是 Lyapunov 稳定的。根据文献 [5] 以及式 (11.26) 中条件 1 即可得到系统 (11.1) 有可容许解存在。另外，系统的必要性可有文献 [9] 得到。 □

11.2.2 奇异标称系统的鲁棒可镇定条件

前面我们讨论了系统 (11.10) 的鲁棒稳定性。在前面讨论的基础上，我们将在这里考虑系统 (11.10) 的鲁棒镇定问题，即设计控制器 $u = Kx$，使得闭环系统具有鲁棒稳定性。

定义 11.7 考虑奇异标称系统 (11.10)，如果存在线性的状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t), K \in R^{m\times n}$，使得

(1) 闭环系统是定义 11.6 所定义的鲁棒稳定的，则奇异标称系统 (11.10) 是鲁棒可镇定的。

(2) 闭环系统是定义 11.5 所定义的鲁棒 Lyapunov 渐近稳定的，则奇异标称系统 (11.10) 也是鲁棒可镇定的。

把 $u(t) = Kx(t)$ 代入系统 (11.10) 得

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \tag{11.30}$$

根据定理 11.11 与定义 11.7，可得系统 (11.10) 的鲁棒可镇定条件。

定理 11.12 奇异标称系统 (11.10) 是鲁棒可镇定的，当且仅当存在一个适当维数的正定对称矩阵 X，一个适当维数的矩阵 Y，使得如下的条件满足：

$$XE^{\mathrm{T}} = EX \geqslant 0,\quad XA^{\mathrm{T}} + AX + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.31}$$

此时，状态反馈控制律 $u(t) = YX^{-1}x(t)$。

证明 由定理 11.11 可知闭环系统 (11.30) 满足鲁棒稳定的充分必要条件为：存在一个正定矩阵 P，使得下面的不等式成立

$$E^{\mathrm{T}}P = PE \geqslant 0,\quad A^{\mathrm{T}}P + PA + PBK + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{11.32}$$

由于控制增益 K 的引入，使得不等式 (11.32) 非线性化。因此，不能通过 MATLAB 工具箱直接求解。鉴于此，在式 (11.32) 两边同时左乘 P^{-1}，右乘 P^{-1}，设

$$X = P^{-1},\quad Y = KX \tag{11.33}$$

即可得到式 (11.31)。此时 $K = YX^{-1}$。 □

基于文献 [4] 的矩阵变换方法，我们把式 (11.32) 合成了一个条件，得到了如下的推论。

推论 11.2　奇异标称系统 (11.10) 是鲁棒可镇定的，当且仅当存在一个适当维数的正定对称矩阵 X，一个适当维数的矩阵 Y 和 Z，使得如下的条件满足：

$$\Theta A^{\mathrm{T}} + A\Theta + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.34}$$

其中 $\Theta = XE^{\mathrm{T}} + \Phi Y^{\mathrm{T}}$，矩阵 Φ 满足 $\mathrm{rank}\Phi = n - r$，可以根据 $E\Phi = 0$ 求出。此时，状态反馈控制律 $u(t) = Z\Theta^{-1}x(t)$。

证明　考虑式 (11.12)，由于 $E\Phi = 0$，$\mathrm{rank}\Phi = n - r$，因此存在非奇异矩阵 $\Lambda \in R^{(n-r)\times(n-r)}$，使得下面等式成立：

$$\Phi = L_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \Lambda \tag{11.35}$$

另外由式 (11.13) 与 (11.16) 可得

$$\bar{P} = L_1^{-\mathrm{T}} P L_2 = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \tag{11.36}$$

引入变量 Θ，令

$$\Theta = P^{-1} = L_2 \bar{P}^{-1} L_1^{-\mathrm{T}} \tag{11.37}$$

可得

$$\begin{aligned} \Theta = & L_2 \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} L_2^{\mathrm{T}} L_2^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{(n-r)\times(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L_1^{-\mathrm{T}} \\ & + L_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \Lambda\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} 0 & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} L_1^{-\mathrm{T}} \\ \equiv & XE^{\mathrm{T}} + \Phi Y^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{11.38}$$

其中

$$X = L_2 \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} L_2^{\mathrm{T}},\quad Y = L_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \Lambda^{-\mathrm{T}} \tag{11.39}$$

综上可得

$$\Theta^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} = (XE^{\mathrm{T}} + \Phi Y^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} X E = E(XE^{\mathrm{T}} + \Phi Y^{\mathrm{T}}) = E\Theta \tag{11.40}$$

即条件 (11.11a) 成立。在式 (11.32) 两边同时左乘 P^{-1}，右乘 P^{-1}，令

$$\Theta = P^{-1},\quad Z = K\Theta \tag{11.41}$$

即可得到式 (11.45)。此时 $K = Z\Theta^{-1}$。 □

标注 11.1 为了消去系统鲁棒稳定条件中的等式约束。文献 [4] 通过对矩阵 E 进行分析，引进了矩阵 Φ 使得 $E\Phi=0$。但是满足 $E\Phi=0$ 的 Φ 有无穷多个，因此导致通过推论 11.2 求解的状态反馈增益阵 K 有无穷解，因此控制器设计的保守性无法判定，但所有的状态反馈增益阵 K 都能使闭环系统保持鲁棒稳定性。

基于文献 [9] 和定理 11.11，系统满足鲁棒稳定的条件如下。

定理 11.13 奇异标称系统 (11.10) 是鲁棒可镇定的，如果存在一个适当维数的正定对称矩阵 X，一个适当维数的矩阵 Y，使得如下的条件满足：

$$XE^{\mathrm{T}}=EX\geqslant 0,\quad XA^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}+EAX+EBY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}<0 \tag{11.42}$$

此时，状态反馈控制律 $u(t)=YX^{-1}x(t)$。

证明 把条件 (11.27) 的第二式改写成

$$A^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Q+QEA<0 \tag{11.43}$$

两边同时左乘 P^{-1}，右乘 P^{-1}，令

$$X=Q^{-1},\quad Y=KX \tag{11.44}$$

即可证明条件 (11.42) 满足。 □

类似于推论 11.2，我们可以得到如下的推论 11.3。

推论 11.3 奇异标称系统 (11.10) 是鲁棒可镇定的，如果存在一个适当维数的正定对称矩阵 X，一个适当维数的矩阵 Y 和 Z，使得如下的条件满足

$$\Theta A^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}+EA\Theta+EBZ+Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}<0 \tag{11.45}$$

其中 $\Theta=XE^{\mathrm{T}}+\Phi Y^{\mathrm{T}}$，此时，状态反馈控制律 $u(t)=Z\Theta^{-1}x(t)$。

标注 11.2 以上我们分析了系统 (11.10) 的鲁棒可镇定条件，得出了许多不同的判据，到底哪个是最好的，哪一个保守性最小？目前，在定性分析上还没有给出结论，但在数值仿真中，我们可以比较各种判据之间的保守性，只能具体的对象做一下具体的比较，但不能说明哪一个判据最好。

11.2.3 数值例子

例 11.3 考虑如下的系统的鲁棒稳定性：

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\5&7&-1\\2&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-9&2\\0&-5&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u(t),\quad t\geqslant 0 \tag{11.46}$$

用 MATLAB/LMI Toolbox 工具箱求解 (11.11)，可得其可行解为

$$P=\begin{bmatrix}0.2382 & 0.0015 & -0.0092\\ 0.0015 & 0.0369 & -0.0063\\ -0.0092 & -0.0063 & 0.0515\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda(P)=0.0345,\ 0.0534,\ 0.2396>0$，再由定理 11.10 可知系统 (11.46) 是鲁棒稳定的。

另外，由 (11.27) 可得下面的解：

$$P=10^8\times\begin{bmatrix}4.0990 & -0.4574 & 1.8522\\ -0.4574 & 0.2882 & 0.1203\\ 1.8522 & 0.1203 & 0.8997\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda(P)=10^8\times(0.2894,\ 1.5478,\ 4.7459)>0$，于是由定理 11.11 可知系统 (11.46) 是鲁棒 Lyapunov 稳定的。

例 11.4　考虑如下的系统的鲁棒稳定性，如果不是鲁棒稳定的，则求其控制率。

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-100 & 0 & 0\\ 8 & -19 & 0\\ 0 & -5 & -100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}u(t),\quad t\geqslant 0$$

$$x(0)=[2,\ 2,\ 2]^{\mathrm{T}} \tag{11.47}$$

由定理 11.10 可知系统 (11.47) 是不稳定的。图 11.1 显示了系统 (11.47) 开环的状态的轨迹，从图不难得出系统 (11.47) 是不稳定的。

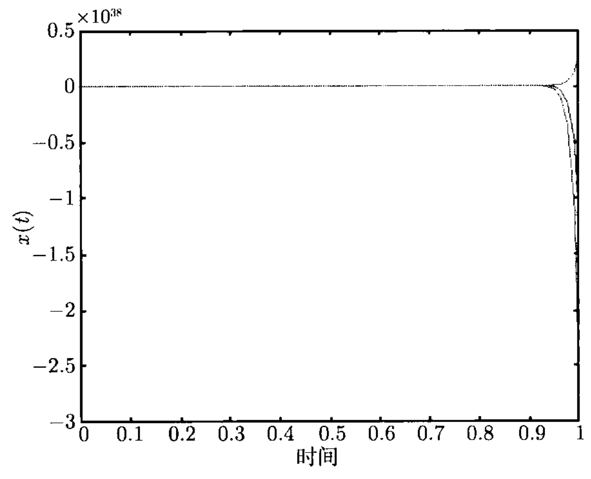


图 11.1　系统 (11.47) 开环状态响应图

为了满足系统鲁棒稳定，我们引进状态反馈控制器。设 $\Phi = [-2\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$，求解条件 (11.31) 可得

$$X = \begin{bmatrix} 410.4685 & -490.6967 & 480.8840 \\ -490.6967 & 462.6745 & -320.1502 \\ 480.8840 & -320.1502 & 310.7617 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -300.9042 \\ 543.4343 \\ -329.1604 \end{bmatrix}$$

$$Z = [-75.9645 \quad -249.0981 \quad 50.8018]$$

状态反馈控制律为

$$u(t) = [-0.8983 \quad -1.9828 \quad -0.4713]\, x(t)$$

其闭环状态响应图显示在图 11.2，从图可以看出，闭环系统是稳定的。

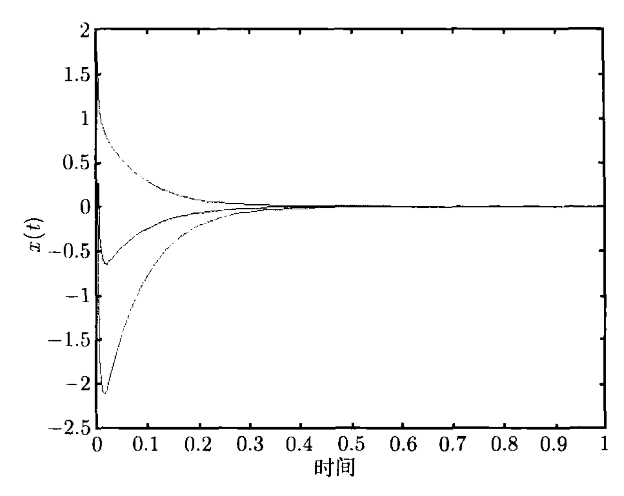


图 11.2 系统 (11.47) 闭环状态响应图

同时由推论 11.3 的鲁棒 Lyapunov 可镇定判据，求解得

$$X = \begin{bmatrix} 337.1624 & -171.7919 & -163.9924 \\ -171.7919 & 82.5286 & 78.9151 \\ -163.9924 & 78.9151 & 99.6675 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0011 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$Z = [-182.6135 \quad -537.0114 \quad 207.8909],$$

状态反馈控制律为

$$u(t) = 10^5 \times [2.8171 \quad -1.4813 \quad -1.3165]\, x(t)$$

比较推论 11.2 和推论 11.3 所得出的状态反馈增益阵 K 的大小，我们发现对于系统 (11.47) 来说，就鲁棒可镇定控制器设计的保守性方面，推论 11.2 要优于推论 11.3。

11.3　奇异标称系统的鲁棒 H_∞ 控制

考虑如下的奇异标称系统：

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t) \\ y(t) &= Lx(t) + D_2 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{11.48}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 为状态向量；$u(t) \in R^m$ 为系统的控制输入向量；$w(t) \in R^p$ 为平方可积的扰动输入向量，即 $w(t) \in L_2[0, \infty)$；$y(t) \in R^q$ 为观测输出向量；$z(t) \in R^l$ 为控制输出向量。E, A, B, D_1, C, D_2 和 L 为适当维数的常矩阵且 $\mathrm{rank}E = r < n$。

从系统 (11.48)，我们可以得到控制输出与扰动输入的传递函数为

$$G_{zw}(s) = \frac{Z(s)}{W(s)} = C(sE - A)^{-1} D_1 \tag{11.49}$$

11.3.1　奇异标称系统的鲁棒 H_∞ 性能

系统 (11.48) 的鲁棒 H_∞ 性能问题定义如下。

定义 11.8 (鲁棒 H_∞ 性能)　考虑系统 (11.48)，当 $u(t) = 0$ 时，对于指定的衰减度 $\gamma > 0$, 如果系统 (11.48) 鲁棒稳定，且 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, $(z(t),\ w(t) \neq 0$, 且$w(t) \in L_2[0, \infty))$，则我们说系统 (11.48) 具有鲁棒 H_∞ 性能。

关于系统 (11.48) 的鲁棒 H_∞ 性能问题，前人做了非常详细的研究，取得了很多有益的结果，本书就不一一列举，仅给出作者在文献 [1] 的启发下，基于周克敏 (见文献 [10]) 的著名不等式以及有界实引理推导出的结果，描述成如下的定理。

定理 11.14　奇异标称系统 (11.48)($u(t) = 0$) 具有鲁棒 H_∞ 性能当且仅当存在一个正定的矩阵 $P > 0$ 以至于如下的条件满足：

$$E^{\mathrm{T}} P = P^{\mathrm{T}} E \tag{11.50a}$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} P + P^{\mathrm{T}} A + C^{\mathrm{T}} C & P^{\mathrm{T}} D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}} P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.50b}$$

证明　考虑不等式 (11.50b)，根据 Schur 补引理，我们立刻得到 $A^{\mathrm{T}} P + P^{\mathrm{T}} A < 0$，加上条件 (11.50a) 保证了系统的鲁棒稳定性。则由定理 11.9 得存在两个非奇异正交矩阵 L_1, $L_2 \in R^{n \times n}$，使得

$$\bar{E} = L_1 E L_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = L_1 A L_2 = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{11.51}$$

令

$$\bar{D}_1 = L_1 D_1 = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CL_2 = [C_1 \quad C_2] \tag{11.52}$$

此时传递函数 $G(s)$ 重新写成 $G(s) = C_1(sI_r - A_r)^{-1}D_{11} - C_2D_{12}$。由有界实引理得

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma$$

当且仅当存在一个正定的矩阵 $X > 0$ 以至于

$$\begin{bmatrix} A_r^{\mathrm{T}}X + XA_r + C_1^{\mathrm{T}}C_1 & XD_{11} - C_1^{\mathrm{T}}C_2D_{12} \\ (XD_{11} + C_1^{\mathrm{T}}C_2D_{12})^{\mathrm{T}} & -(\gamma^2 I - D_{12}^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}C_2D_{12}) \end{bmatrix} < 0 \tag{11.53}$$

令

$$W = C_2^{\mathrm{T}}C_2 + \alpha I, \quad M = C_2^{\mathrm{T}}C_1 \tag{11.54}$$

其中 $\alpha > 0$ 为充分小的正数。如果让

$$P = L_1^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & -W \end{bmatrix} L_2^{-1} \tag{11.55}$$

代入不等式 (11.50b) 简单计算得：对于充分小的 α，不等式 (11.53) 成立等价不等式 (11.50b) 成立。 □

标注 11.3 定理 11.14 是针对指定的衰减度 γ，当 γ 未知时，必须通过如下的凸最优算法求解：

$$\min \gamma$$
$$\text{s.t. 条件(11.50a)与(11.50b)}$$

Takaba(见文献 [5])1994 年基于 Riccati 方程的形式，提出了奇异标称系统 (11.48) 具有鲁棒 H_∞ 性能的充分必要条件，显示如下。

推论 11.4 奇异标称系统 (11.48)($u(t) = 0$) 具有鲁棒 H_∞ 性能当且仅当存在一个正定的矩阵 $P > 0$ 以至于如下的 Riccati 方程成立：

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E$$

$$A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\gamma^2}P^{\mathrm{T}}D_1D_1^{\mathrm{T}}P = 0$$

Masubuchi(见文献 [1])1997 年还得到了类似于定理 11.14 的结论，显示在如下的推论。

推论 11.5 奇异标称系统 (11.48)($u(t) = 0$) 具有鲁棒 H_∞ 性能当且仅当存在一个正定的矩阵 $P > 0$ 以至于如下的条件满足：

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \tag{11.56a}$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + D_1^{\mathrm{T}}D_1 & P^{\mathrm{T}}C \\ C^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.56b}$$

11.3.2 奇异标称系统的鲁棒 H_∞ 控制器设计

奇异标称系统的鲁棒 H_∞ 控制问题，就是设计控制器使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能。首先，我们来分析鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题。

定义 11.9(鲁棒 H_∞ 状态反馈控制) 考虑系统 (11.48)，如果存在线性无记忆的状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$, $K\in R^{m\times n}$ 使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能，我们就说 $u(t)=Kx(t)$ 是鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器。

从定义 11.9 我们知道设计鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的关键在于求解状态反馈增益阵，使得闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能。为了解决这个问题，我们可以利用前所得到的结论。

考虑系统 (11.48)，当 $u(t)=Kx(t)$, $K\in R^{m\times n}$ 时，闭环系统为

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A+BK)x(t) + D_1 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{11.57}$$

根据定理 11.14，参考推论 11.2 的方法，我们可以得到鲁棒 H_∞ 状态反馈控制结论。

定理 11.15 闭环系统 (11.57) 具有鲁棒 H_∞ 性能，当且仅当存在一个适当维数的正定对称矩阵 X，一个适当维数的矩阵 Y 和 Z 使得如下的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \Theta^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + A\Theta + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & D_1 & \Theta^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \\ D_1^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & 0 \\ C\Theta & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.58}$$

其中 $\Theta = XE^{\mathrm{T}} + \Phi Y^{\mathrm{T}}$，矩阵 Φ 满足 $\mathrm{rank}\Phi = n-r$，可以根据 $E\Phi=0$ 求出。此时，鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律 $u(t)=Z\Theta^{-1}x(t)$。

证明 根据定理 11.14 可得，要使闭环系统 (11.57) 有鲁棒 H_∞ 性能当且仅当存在一个适当维数的正定矩阵 P，使得条件 (11.50a) 满足，同时

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}BK + C^{\mathrm{T}}C & P^{\mathrm{T}}D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.59}$$

为使不等式 (11.59) 变成线性矩阵不等式，在不等式左右两边同时乘上 $\mathrm{diag}\{P^{-\mathrm{T}}, I\}$ 与 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I\}$，根据 Schur 补引理，做推论 11.2 同样的变换，即可得到线性矩阵不等式 (11.58)。 □

下面，我们来分析鲁棒 H_∞ 输出反馈控制问题。先看下面的定义。

定义 11.10(鲁棒 H_∞ 输出反馈控制) 考虑如下的能严格实现阶次为 n_c 的输出反馈控制律 $\Sigma_{\rm spc}$

$$\Sigma_{\rm spc}:\ \begin{cases} E_c\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+C_cy(t) \\ u=B_cx_c(t) \end{cases} \tag{11.60}$$

其中 $x_c(t)\in R^{n_c}$ 为输出反馈控制器的状态向量。如果闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能，我们就说 $\Sigma_{\rm spc}$ 是鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器。

把输出反馈控制律 $\Sigma_{\rm spc}$ 代入系统 (11.48) 得增广的闭环系统为

$$\begin{aligned} \hat{E}\dot{\hat{x}}(t)&=\hat{A}\hat{x}(t)+\hat{D}w(t) \\ z(t)&=\hat{C}\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{11.61}$$

其中

$$\hat{E}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_c \end{bmatrix},\quad \hat{A}=\begin{bmatrix} A & BB_c \\ C_cL & A_c \end{bmatrix},\quad \hat{D}=\begin{bmatrix} D_1 \\ C_cD_2 \end{bmatrix},\quad \hat{C}=[C\quad 0]$$

关于系统 (11.61) 鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器问题，有如下的结论。

定理 11.16 闭环系统 (11.61) 具有鲁棒 H_∞ 性能，当且仅当存在适当维数的正定矩阵 X 和 Y，适当维数的矩阵 G, F 和 H 使得如下的条件满足矩阵不等式成立：

$$EX=X^{\rm T}E^{\rm T} \tag{11.62a}$$

$$Y^{\rm T}E=E^{\rm T}Y \tag{11.62b}$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}>0 \tag{11.62c}$$

$$\begin{bmatrix} \varTheta_1 & \varTheta_2 & X^{\rm T}C^{\rm T} & D_1 \\ \varTheta_2^{\rm T} & \varTheta_3 & 0 & \varTheta_4 \\ CX & 0 & -I & 0 \\ D_1^{\rm T} & \varTheta_4^{\rm T} & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix}<0 \tag{11.62d}$$

其中

$$\begin{aligned} &\varTheta_1=AX+X^{\rm T}A^{\rm T}+BF+F^{\rm T}B^{\rm T},\quad \varTheta_2=A+H^{\rm T}+XC^{\rm T}C \\ &\varTheta_3=A^{\rm T}Y+Y^{\rm T}A+GL+L^{\rm T}G^{\rm T}+C^{\rm T}C,\quad \varTheta_4=Y^{\rm T}D_1+GD_2 \end{aligned}$$

证明 由定理 11.14 得，系统 (11.62) 具有鲁棒 H_∞ 性能的充分必要条件为存在一个正定矩阵 P，使得

$$\hat{E}TP=P^{\rm T}\hat{E} \tag{11.63a}$$

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}\hat{A} + \hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C} + \frac{1}{\gamma^2}P^{\mathrm{T}}\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{11.63b}$$

假定矩阵 P 具有如下的形式:

$$P = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ V^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \equiv X_2 X_1^{-1} \tag{11.64}$$

其中矩阵 X, Y 为正定阵，矩阵 V, N 为可逆矩阵，且满足

$$VN^{\mathrm{T}} = I - XY \tag{11.65}$$

把式 (11.64) 代入式 (11.63a) 得

$$EX = X^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} \tag{11.66a}$$

$$Y^{\mathrm{T}}E = E^{\mathrm{T}}Y \tag{11.66b}$$

$$VE_cN^{\mathrm{T}} + X^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Y = E \tag{11.66c}$$

把式 (11.64) 代入式 (11.63b) 得

$$X_1^{\mathrm{T}}\hat{A}X_2 + X_2^{\mathrm{T}}\hat{A}X_1 + X_1^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}X_1 + \frac{1}{\gamma^2}X_2^{\mathrm{T}}\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}X_2 < 0 \tag{11.67}$$

在矩阵 X_2 和 X_1 的形式代入式 (11.67) 中，同时令

$$\begin{gathered} F = B_cV^{\mathrm{T}},\ G = NC_c, \\ H = Y^{\mathrm{T}}AX + GLX + Y^{\mathrm{T}}BF + NA_cV^{\mathrm{T}} \end{gathered} \tag{11.68}$$

根据 Schur 补引理，即可得到不等式 (11.62d) 成立。

综上所述，我们可以得到定理 11.16 成立。 □

标注 11.4 定理 11.16 的证明过程实际上给出了设计鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的步骤，表示如下:

(1) 通过条件 (11.62) 求解出矩阵 X, Y, G, F 和 H;

(2) 对式 (11.65) 的右边进行矩阵分解求解出非奇异矩阵 V 和 N;

(3) 鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器参数 B_c, C_c, A_c 和 E_c 可通过下式求得

$$\begin{gathered} B_c = FV^{-\mathrm{T}}, \quad C_c = N^{-1}G \\ Y^{\mathrm{T}}AX + GLX + Y^{\mathrm{T}}BF + NA_cV^{\mathrm{T}} = H \\ VE_cN^{\mathrm{T}} + X^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}Y = E \end{gathered} \tag{11.69}$$

11.3.3 数值例子

例 11.5 考虑如下的系统:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -9 & 2 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix} w(t) \tag{11.70}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{T}}(t) & x_2^{\mathrm{T}}(t) & x_3^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

给定衰减度 $\gamma = 0.7$，$w(t) \in L_2[0, \infty)$ 为幅值为 4，频率为 0.7 的任意随机向量。设计鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器。

根据 $E\Phi = 0$，假定 $\Phi = [-1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$。把系统 (11.70) 的参数代入定理 11.15 线性矩阵不等式 (11.58)，求解得

$$X = \begin{bmatrix} 81.5193 & -109.3766 & -48.1201 \\ -109.3766 & -23.3558 & 75.9774 \\ -48.1201 & 75.9774 & 14.7208 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -43.2783 \\ -30.0603 \\ -105.0531 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -58.9364 & -295.5043 & -323.6629 \end{bmatrix}$$

状态反馈控制律为

$$u(t) = 10^6 \times \begin{bmatrix} -1.1431 & -0.0007 & -1.1423 \end{bmatrix}$$

闭环系统的状态响应曲线显示在图 11.3，从图可以看见，闭环系统是渐近稳定的。

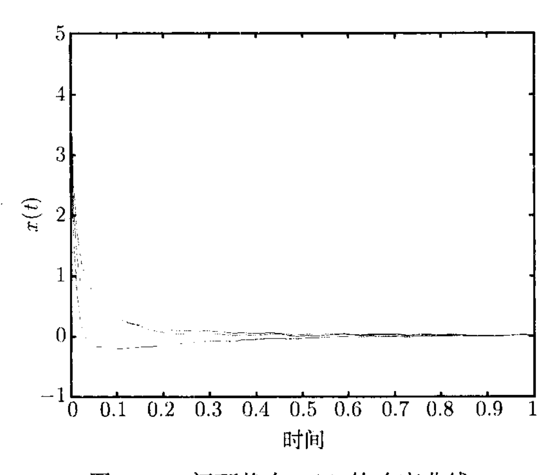


图 11.3 闭环状态 $x(t)$ 的响应曲线

通过计算我们可以发现

$$\sup \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = 0.6159 < 0.7 = \gamma$$

这也验证了系统统 (11.70) 具有鲁棒 H_∞ 性能。

例 11.6　考虑系统如下的系统，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-10 & 0 & 1\\1 & 90 & 2\\0 & -5 & -100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}\\&\quad + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}0.6\\0.8\\1.2\end{bmatrix}w(t)\\z(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{\mathrm{T}}(t)x_2^{\mathrm{T}}(t) & x_3^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\y(t) &= \begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0\\0.6 & -0.5 & 0.1\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}-0.5\\0.1\end{bmatrix}w(t)\\x(0) &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad x_c(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{11.71}$$

给定衰减度 $\gamma = 0.9$，$w(t) \in L_2[0,\ \infty)$ 为均值为 2.5，协方差为 8 的任意随机向量。设计鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器 Σ_{spc}。

根据 $E\Phi = 0$，假定 $\Phi = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$。把系统 (11.71) 的参数代入定理 11.53 条件式 (11.62)，求解得

$$X = 10^4 \times \begin{bmatrix}1.1908 & 1.0390 & -1.1908\\1.0390 & -1.3124 & -1.0390\\-1.1908 & -1.0390 & 1.1908\end{bmatrix},\quad G = 10^4 \times \begin{bmatrix}1.2396 & -0.4159\\-0.3762 & 0.1004\\0.1619 & -0.0804\end{bmatrix}$$

$$Y = 10^4 \times \begin{bmatrix}1.0974 & -0.0079 & 0.0077\\-0.0079 & -0.1354 & -0.0709\\0.0077 & -0.0709 & 0.1176\end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix}-3.9926 & -0.0362 & -0.4697\end{bmatrix}$$

$$H = 10^{-3} \times \begin{bmatrix}0.0096 & -0.0071 & 0.1211\\0.0031 & -0.0023 & 0.0164\\0.0164 & -0.0113 & 0.1580\end{bmatrix}$$

根据 (11.69)，解得输出反馈控制器 Σ_{spc} 参数为

$$A_c = 10^5 \times \begin{bmatrix}-0.01 & 0.01 & 0.01\\0.01 & 0.001 & 0.01\\0.1663 & 0.0174 & 0.2448\end{bmatrix},\quad B_c = \begin{bmatrix}-0.4697 & -0.4524 & -4.4622\end{bmatrix}$$

$$C_c = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.01 & -0.01 \\ 0.01 & -0.01 \\ 4.6065 & -1.6542 \end{bmatrix}, \quad E_c = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 1.1016 \\ 0 & 0.01 & 0.6235 \\ 0 & -0.01 & -0.01 \end{bmatrix}$$

闭环系统的状态响应曲线显示如图 11.4、图 11.5 所示，从图可以看见，闭环系统是渐近稳定的。

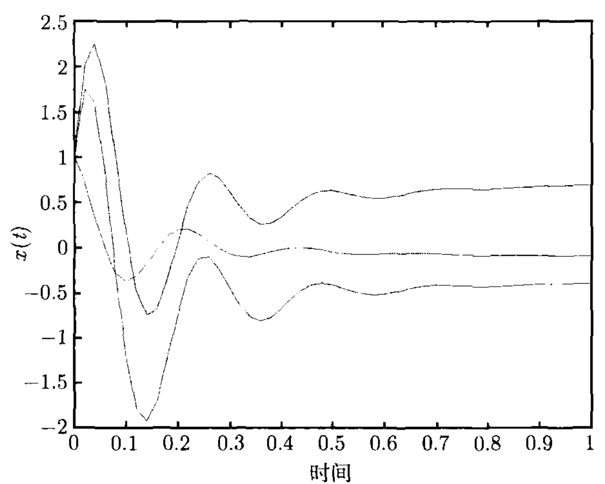


图 11.4　闭环状态 $x(t)$ 的响应曲线

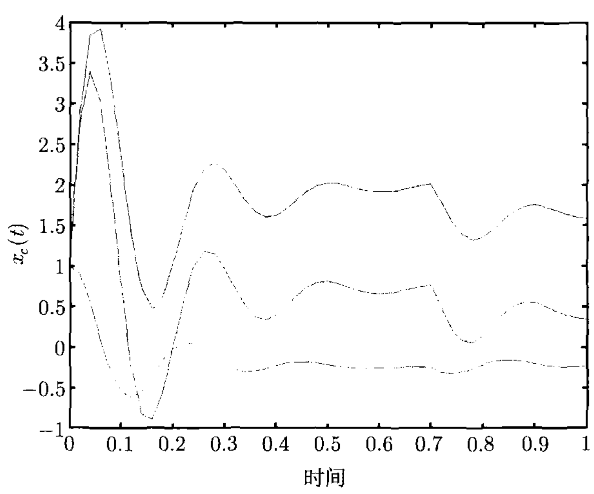


图 11.5　闭环状态 $x_c(t)$ 的响应曲线

另外，通过 MATLAB 我们也可以得出 $z(t)$ 与 $w(t)$ 随时间变化的曲线图，显示如图 11.6、图 11.7 所示。

通过计算我们可以发现

$$\sup \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = 0.8708 < 0.9 = \gamma$$

这也验证了系统统 (11.71) 具有鲁棒 H_∞ 性能。

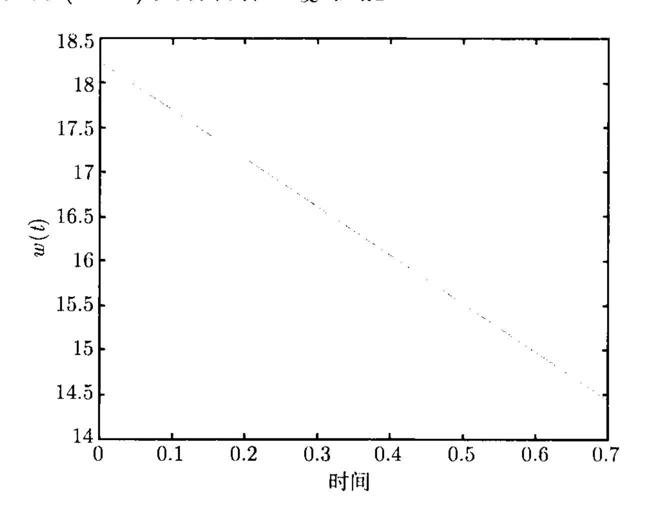


图 11.6　$w(t)$ 随时间变化图

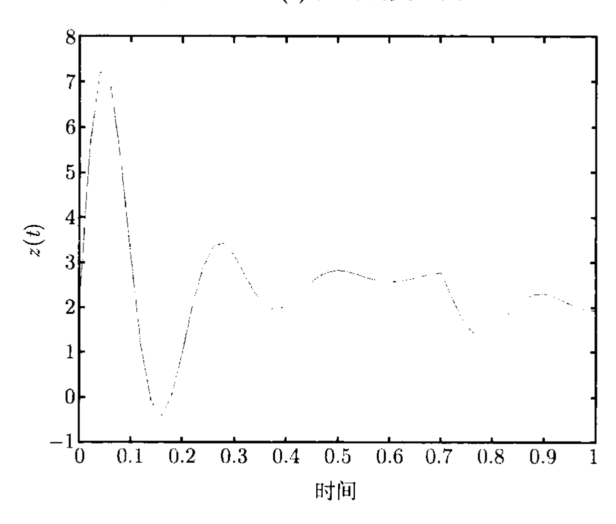


图 11.7　$z(t)$ 随时间变化图

11.4　奇异系统的鲁棒 H_2 控制

本节研究不确定连续时间奇异系统的鲁棒 H_2 控制问题，参数不确定性是时变的、未知的，但是范数有界。研究目标是给出一个对于所有容许的不确定性，不确定奇异系统是正则的、稳定的、无摄动的充分条件，同时系统满足 H_2 性能界限。提出了基于严格线性矩阵不等式的鲁棒 H_2 控制一个充要条件。基于这个线性矩

阵不等式的条件，得出了证鲁棒 H_2 性能的奇异变量反馈控制器的设计方法。

11.4.1 问题的提出

考虑如下形式的参数不确定线性奇异系统：

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{11.72}$$

其中，$x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态变量，$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入，$y(t)\in\mathbb{R}^p$ 为输出，E,A,B,C 为适当位数的常阵，E 可能是奇异的，并假设 $\mathrm{rank}E=r\leqslant n$，$\Delta A,\Delta B$ 是时变矩阵，代表参数不确定性，满足

$$[\,\Delta A \quad \Delta B\,] = MF(t)[\,N_A \quad N_B\,] \tag{11.73}$$

其中，M,N_A 和 N_B 为具有适当维数的已知矩阵，$F(t)$ 为未知的时变矩阵，满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I \tag{11.74}$$

标称奇异系统为

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{11.75}$$

定义 11.11

(1) 如果 $|\,sE-A\,|\neq 0$，则矩阵对 (E,A) 是正则的。

(2) 如果所有的特征值在左半平面，则矩阵对 (E,A) 是稳定的。

(3) 如果 $\deg|\,sE-A\,|=\mathrm{rank}E$，则矩阵对 (E,A) 是无脉冲的。

引理 11.1 矩阵对 (E,A) 是正则的、无脉冲的，则奇异系统 (11.75) 的解是存在的，并且是正则的、无脉冲的。

在这篇文章中，假设奇异系统是正则的、无脉冲的。

定义 11.12

(1) 如果矩阵对 (E,A) 是正则的、稳定的、无脉冲的，则系统 (11.75) 是可容许的。

(2) 如果系统 (11.75) 的解是可容许并且它的 H_2 范数小于给定的正数，则该系统满足 H_2 性能。

(3) 如果 $\deg|\,sE-A\,|=\mathrm{rank}E$，则矩阵对 (E,A) 是无脉冲的。

为了方便证明下面的定理，先介绍一些引理。

引理 11.2 设 U、V 和 W 是适当维数的矩阵，则对任意正数 $\alpha>0$，以下不等式成立：

$$U^{\mathrm{T}}V+V^{\mathrm{T}}U\leqslant \alpha U^{\mathrm{T}}U+\alpha^{-1}V^{\mathrm{T}}V$$

引理 11.3　设 Ψ 是对称矩阵，Γ 和 Ξ 是适当维数的矩阵，任意的 $F^t(t)F(t) \leqslant I$ 有如下不等式成立：

$$\Psi + \Gamma F \Xi + \Xi^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} \Gamma^{\mathrm{T}} < 0$$

当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$，使得

$$\Psi + \varepsilon^{-1} \Gamma \Gamma^{\mathrm{T}} + \varepsilon \Xi^{\mathrm{T}} \Xi < 0$$

引理 11.4　矩阵对 (E,A) 是正则的、无脉冲的，并且系统 (11.75) 是渐进稳定的，当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得

$$E^{\mathrm{T}} X = X^{\mathrm{T}} E \geqslant 0 \tag{11.76a}$$

$$A^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} T < 0 \tag{11.76b}$$

引理 11.5　令 $G(s) = C(sI - A)_{-1}B + D$ 以及 A 是稳定的，有

(1) $\|G(s\|_2 < \infty$ 当且仅当 $D = 0$

(2) 如果 $D = 0$，$\|G(s)\|_2 < \gamma$ 当且仅当存在 $X = 0$，满足 $AX + XA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} < 0, \mathrm{trace}\{CXC^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2$

当 $sE - A$ 正则时，定义奇异系统的传递函数

$$G(s) = C(sI - A)_{-1}B$$

定义传递函数矩阵 $G(s)$ 的 2- 范数为

$$\|G(s)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\mathrm{trace}\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

本节讨论的鲁棒 H_2 控制问题是提出了使不确定奇异系统满足鲁棒 H_2 性能的条件。

11.4.2　主要结果

在这部分中，对奇异系统 (11.72)，提出了一个新有界实引理，使系统满足 H_2 性能。首先，对于系统 (11.75)，给出以下结果，这个结果对解决先前的问题起着关键作用。

因为标称奇异系统 (11.75) 是正则的、无脉冲的，所以必存在非奇异矩阵 L 和 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{11.77}$$

其中，$I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 和 $I_{n-r} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是单位矩阵，$A_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是稳定的。利用 L 和 R，可以得到

$$LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = [C_1 \quad C_2]$$

为了保证 2- 范数的有限性，给出下面的假设。

假设 11.1

$$CR_2L_2B = 0 \tag{11.78}$$

其中 R_2 是 R 的最后 $n-r$ 列，L_2 是 L 的最后 $n-r$ 行。

为了简化，引入矩阵 $\Phi \in R^{n\times(n-r)}$ 满足 $E\Phi = 0$ 且 $\mathrm{rank}\Phi = n-r$。下面的定理给出了奇异系统 (11.75) 的鲁棒 H_2 控制的新有界实引理。

定理 11.17 对于给定的数 $\gamma > 0$，满足假设 (11.78) 的奇异系统 (11.75) 满足鲁棒 H_2 性能，当且仅当存在矩阵 $X > 0$ 和 Y 满足

$$A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.79a}$$

$$\mathrm{trace}\{\hat{C}\Theta E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2 \tag{11.79b}$$

其中 $\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$，$\hat{C} = CRL$。

证明 必要性证明。由假设 11.1，通过简单的计算，可以得到

$$G(s) = C_1(sI_r - A_1)^{-1}B_1 \tag{11.80}$$

因为 A_1 是稳定的，由引理 11.5，$\|G(s)\|_2 < \gamma$ 等价于存在矩阵 $P > 0$ 满足

$$A_1P + PA_1^{\mathrm{T}} + B_1B_1^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.81a}$$

$$\mathrm{trace}\{C_1PC_1^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2 \tag{11.81b}$$

由 (11.81a) 可得

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ -B_2B_1^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & -B_1B_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}[B_1^{\mathrm{T}} \quad B_2^{\mathrm{T}}] < 0 \tag{11.82}$$

其中 Z 是对称矩阵，定义为

$$Z = -\frac{1}{2}(B_2B_2^T + \alpha I_{n-r}) \tag{11.83}$$

$\alpha > 0$ 是充分小的数。

由 (11.81a) 还可得到

$$\begin{bmatrix} P & -B_1B_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & Z \end{bmatrix} = LL^{-1}\begin{bmatrix} P & -B_1B_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & Z \end{bmatrix} R^{\mathrm{T}}R^{-\mathrm{T}}$$

$$= L(L^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}R\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} R^{\mathrm{T}} + L^{-1}\begin{bmatrix} -B_1B_2^{T} \\ Z \end{bmatrix} \Lambda^{-\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} R^{\mathrm{T}})R^{-\mathrm{T}}$$

另外，由 $E\Phi = 0$ 和 $\mathrm{rank}\Phi = n - r$ 可知，存在可逆矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 满足

$$\Phi = R\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}\Lambda \tag{11.84}$$

因此，定义

$$\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}} \tag{11.85}$$

其中

$$X = R\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} R^{\mathrm{T}}, \quad Y = L^{-1}\begin{bmatrix} -B_1B_2^{\mathrm{T}} \\ Z \end{bmatrix}\Lambda^{-\mathrm{T}}$$

所以 (11.81a) 可以写为

$$L(A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}})L^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.86}$$

显然，(11.86) 和 (11.79a) 等价。另外，(11.81b) 可以写为

$$\begin{aligned} C_1PC_1^{\mathrm{T}} &= [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} P & -B_1B_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm{T}} \\ C_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\ &= CRL\Theta R^{-\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \\ &= \hat{C}\Theta E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

其中，$\hat{C} = CRL$。可以很容易地从 (11.81b) 中推出 (11.79b) 成立。必要性证明完毕。

充分性证明。由 $\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$，可以很容易得出

$$E\Theta^{\mathrm{T}} = \Theta E^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{11.87}$$

因为 BB^{T} 是正半定矩阵，所以可以得到

$$A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.88}$$

因此，由引理 11.4 可以得到奇异系统 (11.75) 是可容许的。此外，从必要性的证明中很容易得到 2- 范数的条件。 □

标注 11.5 比较本文由假设 (11.78) 得到的结果与文献 [11] 和 [12] 中由假设 $\ker E \subseteq \ker C$ 得到的结果，本文的保守性明显降低了，因为在假设 $\ker E \subseteq \ker C$ 下可以得到 $C_2 \equiv 0$，显然，它只是 (11.78) 的充分非必要条件。

标注 11.6 下面给出求解矩阵 L 和 R 的算法: 因为奇异系统是正则的、无脉冲的，所以必存在 s_0 是的 $\det(s_0E - A) \neq 0$, 即矩阵 $s_0E - A$ 是可逆的。令

$$\bar{E} = (s_0E - A)^{-1}E, \quad \bar{A} = (s_0E - A)^{-1}A$$

得到非奇异矩阵 T 满足

$$T^{-1}\bar{E}T = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

其中 $E_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆的，$E_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是幂零矩阵，$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 都是可逆的。则 L 和 R 为

$$L = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} T^{-1}(s_0E - A)^{-1}, \quad R = T$$

考虑系统 (11.75) 的对偶系统，即

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{T}}\dot{\hat{x}} &= A^{\mathrm{T}}\hat{x} + C^{\mathrm{T}}\hat{u} \\ \hat{y} &= B^{\mathrm{T}}\hat{x} \end{aligned} \tag{11.89}$$

由条件

$$B^{\mathrm{T}}R_2L_2C^{\mathrm{T}} = 0 \tag{11.90}$$

得到定理 11.17 的推论。

推论 11.6 对于一个给定的 $\gamma > 0$，满足条件 (11.90) 的奇异系统 (11.89) 有鲁棒 H_2 性能，当且仅当存在矩阵 $M > 0$ 和 N 满足

$$A^{\mathrm{T}}\Omega + \Omega^{\mathrm{T}}A + C^{\mathrm{T}}C < 0 \tag{11.91a}$$

$$\mathrm{trace}\{\hat{B}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\Omega\hat{B}\} < \gamma^2 \tag{11.91b}$$

其中 $\Omega = EM^{\mathrm{T}} + N\Phi^{\mathrm{T}}, \hat{B} = RLB$。

接下来需要给出不确定奇异系统 (11.72) 的鲁棒 H_2 控制的条件。利用非奇异变换 (11.77)，定义

$$LM = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N_AR = [\,N_{A1} \quad N_{A2}\,]$$

同样地，为了保证 2- 范数有界，给出下面假设:

假设 11.2

$$\ker E \subseteq \ker N_A, \quad \ker E^{\mathrm{T}} \subseteq ker M^{\mathrm{T}} \tag{11.92}$$

由 (11.92) 可得，$M_2 = 0, N_{A2} = 0$。

由假设 11.2 和定理 11.17 可以得到不确定系统 (11.72) 满足 H_2 性能的充要条件。

定理 11.18 给定 $\gamma > 0$，在条件 (11.78)、(11.92) 下，奇异系统 (11.72) 对所有可容许的不确定性有鲁棒 H_2 性能当且仅当存在标量 $\epsilon > 0$ 和矩阵 $X > 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} & B & \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & -I & N_B^{\mathrm{T}} \\ N_A \Theta^{\mathrm{T}} & N_B & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.93a}$$

$$\mathrm{trace}\{\hat{C}\Theta E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2 \tag{11.93b}$$

其中 $\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}, \hat{C} = CRL$。

证明 充分性证明。对于任何 $F(t)$ 以及 $\epsilon > 0$，可得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta\Delta A^{\mathrm{T}} & \Delta B \\ \Delta B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} N_A\Theta^{\mathrm{T}} & N_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ N_B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} F^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \\ &\leqslant \epsilon \begin{bmatrix} MM^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ N_B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A\Theta^{\mathrm{T}} & N_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最后一步可以从引理 11.2 中得到，因此

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (A+\Delta A)\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta(A+\Delta A)^{\mathrm{T}} & B+\Delta B \\ (B+\Delta B)^T & -I \end{bmatrix} \\ &\leqslant \begin{bmatrix} A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + \epsilon MM^{\mathrm{T}} & B \\ B^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} + \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ N_B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A\Theta^{\mathrm{T}} & N_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据 Schur 补引理，不等式的右面等价于 (11.93a)，因此

$$\begin{bmatrix} (A+\Delta A)\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta(A+\Delta A)^{\mathrm{T}} & B+\Delta B \\ (B+\Delta B)^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

即

$$(A+\Delta A)\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta(A+\Delta A)^{\mathrm{T}} + (B+\Delta B)(B+\Delta B)^{\mathrm{T}} < 0$$

根据定理 11.17，上述不等式和 (11.93b) 能保证在假设 (11.78) 和 (11.92) 的条件下，不确定系统 (11.75) 是可容许的并且在所有可容许的不确定性范围内 $\|G(s)\|_2 < \gamma$。

必要性证明。假设在 (11.78) 和 (11.92) 的条件下，不确定系统 (11.75) 有鲁棒 H_2 性能，由定理 11.17 可得，存在矩阵 $X > 0$ 和 Y 满足 (11.79a)、(11.79b)。因此，

对于满足 (3) 的 $F(t)$，下面不等式成立：

$$\begin{bmatrix} (A+\Delta A)\Theta^{\mathrm{T}}+\Theta(A+\Delta A)^{\mathrm{T}} & B+\Delta B \\ (B+\Delta B)^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} < 0$$

上式也可写为

$$\begin{bmatrix} A\Theta^{\mathrm{T}}+\Theta A^{\mathrm{T}} & B \\ B^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} N_A\Theta^{\mathrm{T}} & N_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ N_B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} F^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

由引理 11.3 可得，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} A\Theta^{\mathrm{T}}+\Theta A^{\mathrm{T}} & B \\ B^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} MM^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} \Theta N_A^{\mathrm{T}} \\ N_B^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A\Theta^{\mathrm{T}} & N_B \end{bmatrix} < 0$$

再由 Schur 补引理，可得 (11.93a)。参照定理 11.17 必要性的证明很容易证明 (11.93b) 成立。 □

接下来设计一个静态奇异变量反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 使得闭环系统具有鲁棒 H_2 性能。

定理 11.19 给定 $\gamma > 0$，在条件 (11.78) 和 (11.92) 下，不确定奇异系统 (11.72) 所有可容许性有鲁棒 H_2 性能，当且仅当存在 $\epsilon > 0$，矩阵 $X > 0$，Y，Z 满足

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \Theta N_A^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}} N_B^{\mathrm{T}} \\ N_A\Theta^{\mathrm{T}} + N_B Z & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.94a}$$

$$\mathrm{trace}\{\hat{C}\Theta E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2 \tag{11.94b}$$

其中

$$\Sigma = A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \epsilon MM^{\mathrm{T}}$$

$$\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$$

这里 Θ 是可逆的，$\hat{C} = CRL$。在这种情况下，可以得到所求的反馈增益

$$K = Z\Theta^{-\mathrm{T}} \tag{11.95}$$

证明 必要性证明。闭环系统

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A_K + A_{K\Delta})x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{11.96}$$

其中

$$A_K = A + BK$$

$$A_{K\Delta} = \Delta A + \Delta BK = MF(t)(N_A + N_B K)$$

由定理 11.18，从闭环系统 (11.96) 可以推出系统 (11.72) 有鲁棒 H_2 性能当且仅当存在 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}, \epsilon > 0$, 矩阵 $X > 0, Y$ 满足

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \Theta N_A^{\mathrm{T}} + \Theta K^{\mathrm{T}} N_B^{\mathrm{T}} \\ N_A \Theta^{\mathrm{T}} + N_B K \Theta^{\mathrm{T}} & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.97a}$$

$$\mathrm{trace}\{\hat{C}\Theta E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\} < \gamma^2 \tag{11.97b}$$

其中

$$\Sigma = A\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta A^{\mathrm{T}} + BK\Theta^{\mathrm{T}} + \Theta K^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} + \epsilon M M^{\mathrm{T}}$$

令

$$Z = K\Theta^{\mathrm{T}} \tag{11.98}$$

将 (11.98) 代入 (11.97)，可以立刻得到 (11.94) 成立。必要性证明完毕。

充分性证明。不失一般性，假设 $\Theta = EX + Y\Phi^{\mathrm{T}}$ 是非奇异的，否则，取一个充分小的标量 $\alpha > 0$ 使得 $\hat{\Theta} = \Theta + \alpha I$ 满足 (11.94a)，其中 Θ 可逆。如果 (11.94) 成立，(11.98) 满足 $K = Z\Theta^{-\mathrm{T}}$。考虑上述因素，闭环系统有鲁棒 H_2 性能。 □

标注 11.7　上面提到的 H_2 控制问题其实不是最理想的控制。换句话说，H_2 性能不是最优的。事实上，可以得到最优的 H_2 性能。引入对称矩阵 Q，(11.94) 等价于

$$\begin{bmatrix} Q & C\Theta E^{\mathrm{T}} \\ E\Theta^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} & E\Theta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} > 0, \quad \mathrm{trace}(Q) < \gamma^2$$

下面给出 H_2 最优问题：

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathrm{trace}(Q) \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \Sigma & \Theta N_A^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}} N_B^{\mathrm{T}} \\ N_A \Theta^{\mathrm{T}} + N_B Z & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} Q & C\Theta E^{\mathrm{T}} \\ E\Theta^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} & E\Theta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

它可以用 LMI 工具箱求解。

11.4.3　数值例子

为了验证上面得到的理论结果，下面给出一个数值例子。

考虑如下参数的线性不确定系统 (11.72)：

$$E = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 & 0.25 \\ -0.75 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$N_A=[1\quad 2\quad 0],\quad N_B=[1\quad 1],\quad M=[2\quad -1\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

不确定矩阵 $F(t)=\sin(t)$。设计一个状态反馈控制器使得闭环系统有鲁棒 H_2 性能，给定 $\gamma=3$，让 $\varPhi=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$，然后用 LMI 工具箱求解 (11.94)，得到如下结果：

$$X=\begin{bmatrix}3.4524 & -1.7757 & -0.5127\\-1.7757 & 4.5967 & 0.6315\\-0.5127 & 0.6315 & 2.3082\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}-10.6598\\25.5451\\-10.6113\end{bmatrix},\quad \epsilon=0.51$$

$$Z=\begin{bmatrix}-11.5956 & -5.7145 & 4.8048\\7.8373 & 5.7640 & -4.8543\end{bmatrix}$$

由定理 11.19，得到状态反馈控制器

$$u(t)=\begin{bmatrix}-6.3412 & 7.3543 & 23.6743\\5.3185 & -5.4650 & -4.8543\end{bmatrix}x(t)$$

设置初始状态向量 $x_0=[0.02\quad 0.01\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 并且在 MATLAB 中对闭环系统进行仿真，得到状态轨迹如图 11.8 所示，从中可以看出闭环系统 (11.96) 是稳定的、无脉冲的。

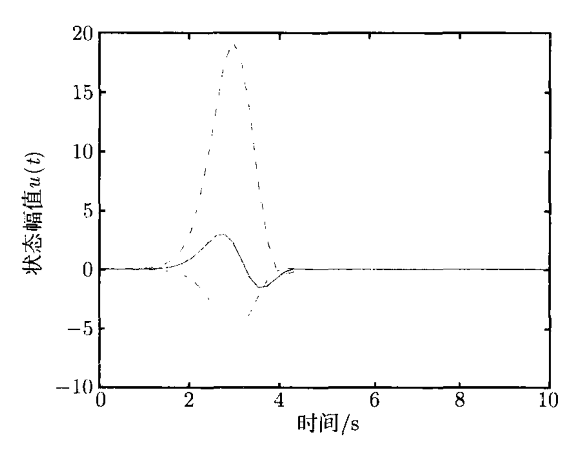


图 11.8 闭环奇异系统的状态轨迹

接下来的问题是验证 2- 范数是否小于给定的 γ。观察图 11.9、图 11.10 所示的输出响应和控制输入的曲线，这两条曲线很难拟合，因此可以直接求解 2- 范数。

然而，由 Parseval 定理可知，系统的 2- 范数在时域内定义如下：

$$\|G(s)\|_2=\left(\int_0^{\infty}h^{\mathrm{T}}(t)h(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

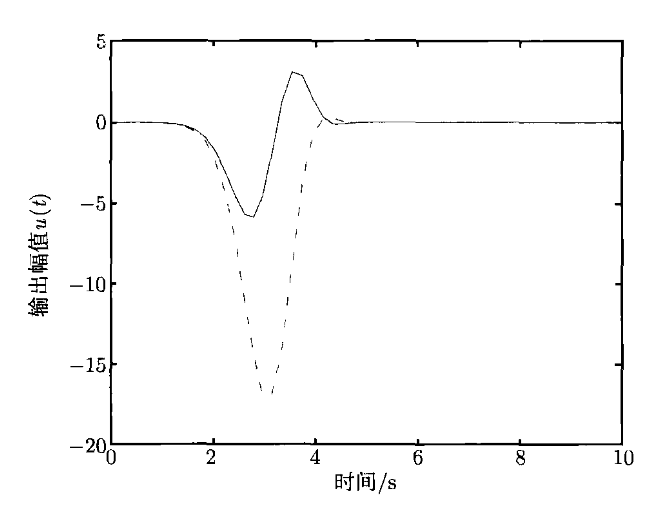


图 11.9　闭环奇异系统的输出响应

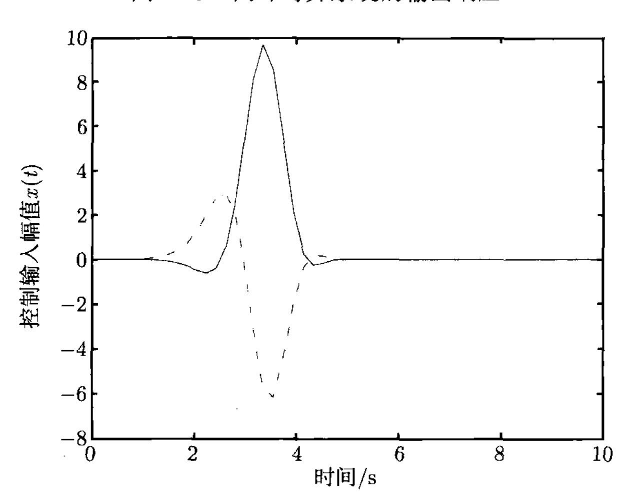


图 11.10　闭环奇异系统的控制输入

其中 $h(t)$ 是脉冲响应。从定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

其中函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内是连续的。因此，为了近似地计算 2- 范数，选择足

够多的点并且将闭区间划分为子区间，设置仿真时间为 $[0,10]$，固定步长为 0.001 秒。最终选择了 10001 个点，得到了 2- 范数如下：

$$\|G(s)\|_2 = \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \frac{20.61}{12.64} = 1.63$$

它小于给定的 γ，因此，闭环不确定奇异系统有鲁棒 H_2 性能。

11.5 不确定离散奇异时滞系统时滞依赖的鲁棒稳定性及鲁棒镇定条件

本节研究了不确定离散奇异时滞系统的鲁棒稳定与鲁棒可镇定问题，并且时滞是随着时间改变的，系统的不确定性表现为范数有界的。首先，通过建立二次型有限和不等式，得出新的时滞依赖鲁棒稳定条件，将其以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式表现出来。其次，根据该稳定性条件，给出了对所有容许的不确定性确保闭环系统正则、因果、稳定的鲁棒镇定控制器设计方法。最后用数值仿真例子验证了所提方法的有效性。

11.5.1 问题的提出和定义

考虑如下不确定离散奇异时滞系统,

$$\begin{cases} Ex(k+1) = (A+\Delta A)x(k) + (A_d+\Delta A_d)x(k-d(k)) + (B+\Delta B)u(k) \\ x(k) = \phi(k), k = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \cdots, 0 \end{cases} \tag{11.99}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量，$u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，E, A, A_d 和 B 为具有适当维数的常值矩阵，且 E 可能是奇异的，设 $\operatorname{rank}E = r \leqslant n$。$\{\phi(k), k = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \cdots, 0\}$ 为已知的初始序列，$d(k)$ 为正整数的时变时滞项，满足

$$0 < \underline{d} \leqslant d(k) \leqslant \bar{d} < \infty, k = 1, 2, \cdots \tag{11.100}$$

显然，当 $\bar{d} - \underline{d} = 0$ 时，就意味着时滞 $d(k)$ 是时不变的。$\Delta A, \Delta A_d$ 和 ΔB 为具有如下形式的未知且可能时变的范数有界的参数不确定性：

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & \Delta B \end{bmatrix} = MF(k)\begin{bmatrix} N_a & N_d & N_b \end{bmatrix} \tag{11.101}$$

其中 M, N_a, N_d, N_b 为具有适当维数的已知常阵，$F(k)$ 为满足 $F^T(k)F(k) \leqslant I$ 的未知矩阵函数。不考虑系统 (11.99) 的不确定项，其标称系统为

$$Ex(k+1) = Ax(k) + A_dx(k-d(k)) + Bu(k) \tag{11.102}$$

不考虑系统 (11.99) 的不确定项以及控制输入，其标称非强迫系统为

$$Ex(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d(k)) \tag{11.103}$$

为了分析方面，给出如下一些定义和引理。

定义 11.13　(1) 如果矩阵对 (E, A) 是正则的、因果的，那么系统 (11.103) 是正则的、因果的。

(2) 如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在一个标量 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得对于容许的初始条件 $\sup_{-\bar{d} \leqslant k \leqslant 0} \|\phi(k)\| \leqslant \delta(\epsilon)$，那么系统 (11.99) 的解 $x(k)$ 满足 $\|x(k)\| \leqslant \epsilon$，且当 $k \to \infty$ 时有 $x(k) \to 0$，系统 (11.103) 是稳定的。

定义 11.14　如果当 $u(k) \equiv 0$ 时系统 (11.99) 对所有容许的不确定性 ΔA 和 ΔA_d 都是正则，因果，且稳定，则系统 (11.99) 是鲁棒稳定的。

定义 11.15　如果存在一个状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)(K \in \mathbb{R}^{m \times n})$ 使得对应的闭环系统是鲁棒稳定的，则系统 (11.99) 是鲁棒可镇定的。其中 $u(k) = Kx(k)$ 就称为鲁棒镇定控制器。

引理 11.6　对于无穷序列 $\alpha_i \geqslant 0 (i = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$，如果 $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = \alpha < \infty$，那么

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \alpha_i = 0.$$

引理 11.7[13]　中对任意的常数阵 $N_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$，正定对称阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及正整数的时变时滞 $d(k)$，有

$$-\sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l) E^{\mathrm{T}} Z E y(l) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(k) \{ \Pi + d(k) Y^{\mathrm{T}} Z^{-1} Y \} \xi(k) \tag{11.104}$$

其中

$$\Pi = \begin{bmatrix} N_1^{\mathrm{T}} E + E^{\mathrm{T}} N_1 & E^{\mathrm{T}} N_2 - N_1^{\mathrm{T}} E \\ * & -N_2^{\mathrm{T}} E - E^{\mathrm{T}} N_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \tag{11.105}$$

11.5.2　鲁棒稳定性分析

首先，考虑系统 (11.103) 的鲁棒稳定性问题。令

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}}(k) & x^{\mathrm{T}}(k-d(k)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad y(l) = x(l+1) - x(l)$$

那么系统 (11.103) 可写成

$$Ex(k+1) = \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} \xi(k), \quad Ey(k) = \begin{bmatrix} A - E & A_d \end{bmatrix} \xi(k) \tag{11.106}$$

定理 11.20 如果存在适当维数的正定对称阵 P,Q,Z 和矩阵 S,S_d,N_1,N_2，使得

$$\varXi=\begin{bmatrix}\varXi_{11} & \varXi_{12} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & \bar{d}(A-E)^{\mathrm{T}}Z & A^{\mathrm{T}}P\\ * & \varXi_{22} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & \bar{d}A_d^{\mathrm{T}}Z & A_d^{\mathrm{T}}P\\ * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0\\ * & * & * & * & -P\end{bmatrix}<0 \tag{11.107}$$

那么系统 (11.103) 是鲁棒稳定的，其中

$$\begin{aligned}\varXi_{11}&=A^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}}+SR^{\mathrm{T}}A-E^{\mathrm{T}}PE+N_1^{\mathrm{T}}E+E^{\mathrm{T}}N_1+(\bar{d}-\underline{d}+1)Q\\ \varXi_{12}&=A^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}}+SR^{\mathrm{T}}A_d+E^{\mathrm{T}}N_2-N_1^{\mathrm{T}}E\\ \varXi_{22}&=A_d^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}}+S_dR^{\mathrm{T}}A_d-N_2^{\mathrm{T}}E-E^{\mathrm{T}}N_2-Q\end{aligned}$$

且 $R\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ 是任意满足 $E^{\mathrm{T}}R=0$ 的列满秩矩阵。

证明 因为 $\mathrm{rank}E=r\leqslant n$，所以存在两个可逆矩阵 G 和 $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\bar{E}=GEH=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad R=G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ \bar{\varPhi}\end{bmatrix} \tag{11.108}$$

其中 $\bar{\varPhi}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 为任意非奇异矩阵。令

$$\bar{A}=GAH=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \bar{P}=G^{-\mathrm{T}}PG^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_1=G^{-\mathrm{T}}N_1H=\begin{bmatrix}\bar{N}_{1,11} & \bar{N}_{1,12}\\ \bar{N}_{1,21} & \bar{N}_{1,22}\end{bmatrix},\quad \bar{S}=H^{\mathrm{T}}S=\begin{bmatrix}\bar{S}_{11}\\ \bar{S}_{21}\end{bmatrix},\quad \bar{R}=G^{-\mathrm{T}}R=\begin{bmatrix}0\\ \bar{\varPhi}\end{bmatrix}$$

因为 $\varXi_{11}<0$ 且 $(\bar{d}-\underline{d}+1)Q>0$，则

$$\varPsi=A^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}}+SR^{\mathrm{T}}A-E^{\mathrm{T}}PE+N_1^{\mathrm{T}}E+E^{\mathrm{T}}N_1<0$$

上式左乘 H^{T} 右乘 H 得

$$\begin{aligned}\bar{\varPsi}=H^{\mathrm{T}}\varPsi H&=\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{R}\bar{S}^{\mathrm{T}}+\bar{S}\bar{R}^{\mathrm{T}}\bar{A}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{E}+\bar{N}_1^{\mathrm{T}}\bar{E}+\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{N}_1\\ &=\begin{bmatrix}\sharp & \sharp\\ \sharp & \bar{A}_{22}\bar{\varPhi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}}+\bar{S}_{21}\bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22}\end{bmatrix}<0\end{aligned} \tag{11.109}$$

其中 $\sharp$ 是与后续讨论无关的项。由 (11.109) 可知

$$\bar{A}_{22}\bar{\varPhi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}}+\bar{S}_{21}\bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22}<0 \tag{11.110}$$

由此可以看出，$\bar{A}_{22}$ 是非奇异的。否则，假设 $\bar{A}_{22}$ 是奇异的，一定存在一个非零变量 $\zeta \in \mathbb{R}^{n-r}$ 使得 $\bar{A}_{22}\zeta = 0$。那么就有 $\zeta^{\mathrm{T}}(\bar{A}_{22}\bar{\Phi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}} + \bar{S}_{21}\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22})\zeta = 0$, 而这与 (11.110) 相矛盾，因此假设不成立，即 $\bar{A}_{22}$ 是非奇异的。由上可得

$$\begin{aligned}\det(zE - A) &= \det(G^{-1})\det(z\bar{E} - \bar{A})\det(H^{-1}) \\ &= \det(G^{-1})\det(-\bar{A}_{22})\det(zI_r - (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}))\det(H^{-1})\end{aligned}$$

上式不是一致为零且 $\deg(\det(zE - A)) = r = \mathrm{rank}\ E$。所以矩阵对 (E, A) 是正则、因果的。根据定义 11.13 可知，系统 (11.103) 是正则的、因果的。

对于系统 (11.103)，选择如下 Lyapunov 函数：

$$\begin{aligned}V(k) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) &+ \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{0}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l)E^{\mathrm{T}}ZEy(l) \\ &+ \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l) + \sum_{\theta=-\bar{d}+2}^{\underline{d}+1}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)\end{aligned} \tag{11.111}$$

则 $V(k)$ 沿系统 (11.103) 轨迹的前向差分为

$$\begin{aligned}\Delta V(k) =& V(k+1) - V(k) \\ =& x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}PEx(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) \\ &+ \bar{d}y^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}ZEy(k) - \sum_{l=k-\bar{d}}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l)E^{\mathrm{T}}ZEy(l) \\ &+ \sum_{l=k+1-d(k+1)}^{k} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l) \\ &+ (\bar{d} - \underline{d})x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) - \sum_{l=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l) \\ \leqslant& \xi^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix}\xi(k) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) \\ &+ \bar{d}y^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}ZEy(k) - \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l)E^{\mathrm{T}}ZEy(l) \\ &+ x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) - x^{\mathrm{T}}(k-d(k))Qx(k-d(k)) + \sum_{l=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l) \\ &+ (\bar{d} - \underline{d})x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) - \sum_{l=k+1-\bar{d}}^{k-\underline{d}} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)\end{aligned} \tag{11.112}$$

因为 $E^{\mathrm{T}}R=0$，所以容易得到

$$\begin{aligned}&x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}}x(k)+x^{\mathrm{T}}(k)SR^{\mathrm{T}}Ex(k+1)\\&+x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}}x(k-d(k))+x^{\mathrm{T}}(k-d(k))S_dR^{\mathrm{T}}Ex(k+1)\\=&x^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}}+SR^{\mathrm{T}}A)x(k)+2x^{\mathrm{T}}(k)(A^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}}+SR^{\mathrm{T}}A_d)x(k-d(k))\\&+x^{\mathrm{T}}(k-d(k))(A_d^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}}+S_dR^{\mathrm{T}}A_d)x(k-d(k))=0\end{aligned}\tag{11.113}$$

那么，由引理 11.7，式 (11.112) 和式 (11.113) 可得

$$\Delta V(k)\leqslant\xi^{\mathrm{T}}(k)\Xi\xi(k)$$

再由式 (11.107) 得

$$\Delta V(k)<0$$

且

$$\begin{aligned}\lambda_1\|x(k+1)\|^2-V(0)&\leqslant x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}PEx(k+1)-V(0)\\&\leqslant V(k+1)-V(0)=\sum_{i=0}^{k}\Delta V(i)\\&\leqslant-\lambda_2\sum_{i=0}^{k}\|x(i)\|^2\end{aligned}\tag{11.114}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_{\min}(E^{\mathrm{T}}PE)>0,\lambda_2=-\lambda_{\max}(\Xi)>0.$

显然，由式 (11.114) 知

$$0\leqslant\sum_{i=0}^{k}\|x(i)\|^2\leqslant\frac{V(0)}{\lambda_2}\tag{11.115}$$

由式 (11.115) 知，$\sum\limits_{i=0}^{k}\|x(i)\|^2(k=0,1,2,\cdots,\ n,\cdots,\infty)$ 是有界的。由引理 11.6 得，$\lim\limits_{i\longrightarrow\infty}\|x(i)\|=0$，因此，$\lim\limits_{i\longrightarrow\infty}x(i)=0$，这就意味着对于任意满足 $0<\underline{d}\leqslant d(k)\leqslant\bar{d}<\infty,k=1,2,\cdots$ 的时变时滞 $d(k)$，系统 (11.103) 是稳定的。由定义 11.14 知，系统 (11.103) 是鲁棒稳定的。 □

基于定理 11.20，对 $u(k)=0$ 时的系统 (11.99)，容易得出以下定理。

定理 11.21 如果存在适当维数的正定对称阵 P,Q,Z，矩阵 S,S_d,N_1,N_2，标量 $\varepsilon>0$，使得式 (11.116) 成立，那么 $u(k)=0$ 时，系统 (11.99) 对所有满足式 (11.100) 和式 (11.101) 的不确定性都是鲁棒稳定的。

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & \bar{d}(A-E)^{\mathrm{T}}Z & A^{\mathrm{T}}P & SR^{\mathrm{T}}M & \varepsilon N_a^{\mathrm{T}} \\ * & \Xi_{22} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & \bar{d}A_d^{\mathrm{T}}Z & A_d^{\mathrm{T}}P & S_dR^{\mathrm{T}}M & \varepsilon N_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & \bar{d}ZM & 0 \\ * & * & * & * & -P & PM & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{11.116}$$

其中 R, Ξ_{11}, Ξ_{12} 和 Ξ_{22} 与式 (11.107) 中定义相同。

证明 将式 (11.107) 中 A 替换成 $A + MF(k)N_a$，A_d 替换成 $A_d + MF(k)N_d$ 可得

$$\Xi + \Gamma F(k)\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(k)\Gamma^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11.117}$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}}RS_d^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{d}M^{\mathrm{T}}Z & M^{\mathrm{T}}P \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} N_a & N_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由引理 9.3 知，存在标量 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\Xi + \varepsilon^{-1}\Gamma\Gamma^{\mathrm{T}} + \varepsilon\Phi^{\mathrm{T}}\Phi < 0 \tag{11.118}$$

由 Schur 引理知，该不等式等价于 (11.116)。 □

11.5.3 鲁棒镇定控制器设计

首先，考虑标称系统 (11.102) 的镇定控制器设计问题。控制律 $u(k) = Kx(k)$，则对应的标称闭环系统为

$$Ex(k+1) = (A + BK)x(k) + A_dx(k - d(k)) \tag{11.119}$$

对该标称闭环系统，可得下面的定理。

定理 11.22 如果存在适当维数的正定对称阵 P, Q, Z，矩阵 S, N_1, N_2, X, L，使得式 (11.120) 成立，那么系统 (11.119) 是鲁棒可镇定的

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & X^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} + EN_2 - N_1^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & \Upsilon_{22} & X^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{d}Z \\ * & * & -Q - EN_2 - N_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z \end{bmatrix} < 0 \tag{11.120}$$

其中 $R \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ 任意满足 $ER=0$ 的列满秩矩阵

$$\Upsilon_{11} = (A-E)X + X^{\mathrm{T}}(A-E)^{\mathrm{T}} + BL + L^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + N_1^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} + EN_1 + (\bar{d}-\underline{d}+1)Q$$
$$\Upsilon_{12} = EP + SR^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}} + (A-E)X + BL$$
$$\Upsilon_{22} = -X - X^{\mathrm{T}} + P$$

且状态反馈控制律为

$$u(k) = LX^{-1}x(k)$$

证明 系统 (11.119) 等价于如下形式:

$$\bar{E}\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{A}_d\bar{x}(k-d(k)) \tag{11.121}$$

其中

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} E & I \\ A+BK-E & -I \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix}$$

将式 (11.107) 中的 $E, A, A_d, P, Q, Z, R, S, S_d, N_1, N_2$ 分别替换成 $\bar{E}, \bar{A}, \bar{A}_d, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{Z}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{S}_d, \bar{N}_1, \bar{N}_2$，则由定理 11.20 知，系统 (11.120) 是鲁棒稳定的。作为特例，选择

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \bar{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_d = 0$$

其中 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定对称阵，$R \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $E^{\mathrm{T}}R=0$ 的列满秩矩阵，$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为任意非奇异矩阵，$S \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}, N_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, N_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为任意矩阵。容易验证 $\bar{R}$ 为列满秩矩阵且满足 $\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{R}=0$。使用 Schur 补并令 $\beta \to 0$ 得

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & X^{\mathrm{T}}A_d + E^{\mathrm{T}}N_2 - N_1^{\mathrm{T}}E & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & \Lambda_{22} & X^{\mathrm{T}}A_d & 0 & \bar{d}Z \\ * & * & -Q - E^{\mathrm{T}}N_2 - N_2^{\mathrm{T}}E & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z \end{bmatrix} < 0 \tag{11.122}$$

其中

$$\Lambda_{11}=(A+BK-E)^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}(A+BK-E)+N_1^{\mathrm{T}}E+E^{\mathrm{T}}N_1+(\bar{d}-\underline{d}+1)Q$$
$$\Lambda_{12}=E^{\mathrm{T}}P+SR^{\mathrm{T}}-X^{\mathrm{T}}+(A+BK-E)^{T}X$$
$$\Lambda_{22}=-X-X^{\mathrm{T}}+P$$

现考虑如下离散奇异时变时滞系统:

$$E^{\mathrm{T}}\varsigma(k+1)=(A+BK)^{\mathrm{T}}\varsigma(k)+A_d^{\mathrm{T}}\varsigma(k-d(k)) \tag{11.123}$$

其中 $\varsigma(k)\in\mathbb{R}^n$ 为状态变量。

注意到 $\det(zE-A)=\det(zE^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}})$，因此矩阵对 (E,A) 是正则，因果的，当且仅当矩阵对 $(E^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}})$ 是正则，因果的，因此系统 (11.119) 是正则，因果的，当且仅当系统 (11.123) 是正则，因果得。另外，由于 $\det(zE-(A+BK)-A_dz^{-d(k)})=0$ 的解与 $\det(zE^{\mathrm{T}}-(A+BK)^{\mathrm{T}}-A_d^{\mathrm{T}}z^{-d(k)})=0$ 的解相同，因此系统 (11.119) 是稳定的当且仅当系统 (11.123) 是稳定的。

因此，如果仅仅考虑系统得正则性，因果性，稳定性，可以认为系统 (11.123) 和系统 (11.119) 是等价的。则将 (11.122) 中的 $E,(A+BK),A_d$ 分别替换成 $E^{\mathrm{T}},(A+BK)^{\mathrm{T}},A_d^{\mathrm{T}}$，并引入矩阵 $L=KX$，可得线性矩阵不等式 (11.120)。由定义 11.15 得，离散奇异时变时滞系统 (11.119) 是鲁棒可镇定的。 □

基于上述定理，进一步给出系统 (11.99) 的鲁棒镇定控制器设计算法。

定理 11.23 对系统 (11.99)，如果存在适当维数的正定对称阵 P,Q,Z，矩阵 S,N_1,N_2,X,L，标量 $\epsilon_1>0,\epsilon_2>0$，使得式 (11.124) 成立，那么对应的闭环系统对所有容许的不确定性都是鲁棒可镇定的，且状态反馈控制律为

$$u(k)=LX^{-1}x(k)$$

$$\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Upsilon_{12} & X^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}}+EN_2-N_1^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 & \Theta_{16} & X^{\mathrm{T}}N_d^{\mathrm{T}}\\ * & \Upsilon_{22} & X^{\mathrm{T}}A_d^{\mathrm{T}} & 0 & \bar{d}Z & \Theta_{26} & X^{\mathrm{T}}N_d^{\mathrm{T}}\\ * & * & \Theta_{33} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I\end{bmatrix}<0 \tag{11.124}$$

其中 $R\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足 $ER=0$ 得列满秩矩阵

$$\Theta_{11}=\Upsilon_{11}+\epsilon_1MM^{\mathrm{T}}$$
$$\Theta_{33}=-Q-EN_2-N_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}+\epsilon_2MM^{\mathrm{T}}$$

$$\Theta_{16} = \Theta_{26} = (N_a X + N_b L)^{\mathrm{T}}$$

且 $\Upsilon_{11}, \Upsilon_{12}, \Upsilon_{22}$ 与 (11.120) 中的定义相同。

证明　将 (11.120) 中的 A, A_d 和 B 分别用 $A + MF(k)N_a, A_d + MF(k)N_d$ 和 $B + MF(k)N_b$ 替换，同定理 11.22 的证明，可以得出 (11.124) 成立。 □

11.5.4 数值仿真例子

例 11.7　考虑系统 (11.103) 的参数的如下：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.25 & -0.1 \end{bmatrix}$$

且时变时滞 $d(k)$ 满足 (11.100)。分析该系统的鲁棒稳定性。

由于时滞是时变的，采用本节的方法，计算当时变时滞下确界 $\underline{d} = 0$ 时，确保系统鲁棒稳定的上确界 $\bar{d}$。由定理 11.20 知，通过求线性矩阵不等式 (11.107) 的可行性问题，可求得保证系统鲁棒稳定的时变时滞的最大值为 $\bar{d} = 9$。

例 11.8　考虑系统 (11.99) 的参数如下：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.25 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad N_a = N_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad N_b = 1$$

分析该系统的鲁棒可镇定问题。

设 $\underline{d} = 0$，应用定理 11.23，选取 $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，并通过求线性矩阵不等式 (11.124) 的可行性问题，求得时变时滞的上确界为 $\bar{d} = 8$ 以及一个合适的状态反馈控制律为

$$u(k) = \begin{bmatrix} -9.1083 & -5.6510 \end{bmatrix} x(k)$$

能确保闭环系统鲁棒稳定。

11.6 注　记

本章第 1 节、第 2 节由文献 [7]、[14]、[15] 改写而成，第 3 节、第 4 节由文献 [16]、[17] 改写而成，第 5 节由文献 [18]~[21] 改写而成。

11.7 习　题

1. 考虑如下系统：

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0$$

求解系统解的可容许条件。

2. 考虑如下的系统：

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\6&5&-1\\3&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-8&3\\1&-4&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}u(t),\quad t\geqslant 0$$

判断系统是否具有可容许解，如果没有，设计状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$，使得系统是可容许的。

3. 考虑如下的系统：

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\5&7&-1\\2&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-9&2\\0&-5&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.5\\0.7\\1.1\end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^T(t)&x_2^T(t)&x_3^T(t)\end{bmatrix}^T$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}5&5&5\end{bmatrix}^T$$

给定衰减度 $\gamma=0.6$，$w(t)\in L_2[0,\ \infty)$ 为幅值为 5，频率为 0.6 的任意随机向量。设计鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器。试判断其鲁棒稳定性。

参 考 文 献

[1] Masubuchi I, Suda N, Ohara A. LMI-Based controller synthesis: A unified formulation and solution. Proc. American Control Conf., 1995, 3476-3477.

[2] Lewis F, Mertzios B. Analysis of singular systems using orthogonal functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32: 527-530.

[3] Lewis F, Syrmos V L. A geometric theory for derivative feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36: (9): 1111-1116.

[4] Xu S, Dooren P V, Lam J. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 2002, (47): 1122-1128.

[5] Takaba K, Morihara N, Katayama T. A generalized Lyapunov theorem for descriptor systems. Syst. Control Lett., 1995, 24: 49-51.

[6] Cobb D. Conrollability, observability and duality in singular systems. IEEE Trans. Automa. Control, 1994, 29: 1076-1082.

[7] Dai L. Singular Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[8] Verghese, et al. A generalized state-space for singular systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26: 811-830.

[9] Shi P, Boukas E, Agarwal R K. Robust control of singular continuous-time systems with delays and uncertainties. IEE Proc. Decision and Control, 2000, 1515-1520.

[10] Zhou K, Khargonekar P P. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. Syst. Control Lett., 1988, 11: 85-91.

[11] 嵇小辅. 不确定线性系统鲁棒控制若干问题研究. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 2006.

[12] 史忠科, 吴方向, 王蓓. 鲁棒控制理论. 北京: 国防工业出版社, 2003.

[13] Zhang X M, Han Q L. Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-Time dystems with time-varying delay based on a finite sum inequality. IEEE Transactions on Circuits and Systems -II: Express Briefs, (to appear).2002.

[14] Lewis F L. A survey of linear singular systems. Circuits Syst. Signal Process. 1986, 5: 3-36.

[15] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. IEEE Trans. Autom. Control, 1997, 33: 669-673.

[16] Lu R, Wang J, Xue A, Su H, Chu J. Robust H_∞ filtering for a class of uncertain Lurie time-delay singular systems. Acta Automatica Sinica, 2007, 33: 292-296.

[17] Lu R, Huang W, Su H, Chu J. Robust H_∞ control for a class of uncertain Lurie singular systems with time-delays. Acta Automatica Sinica, 2004, 30: 920-927.

[18] Lu R, Su H, Chu J, Xue A. A simple approach of Robust D-stability for singular time-delay systems. Asian Journal of Control, 2009, 13 (4):

[19] Lu R, Xu Y, Xue A. H-Infinity filtering forsingular systems with communication delays. Signal Processing, 2009, 90(12): 1240-1248.

[20] Lu R, Fu M, Su H, Chu J, Zhou S S. Reduced-order H-Infinity Filtering for Discrete time Singular Systems with Lossy Measurements. IET Control Theory and Applications, In Press, DOI: 10.1049/iet-cta. 2008.0007, 2009.

[21] Lu R, Zou H, Su H, Chu J, Xue A. Robust Stability for a Class of Complex Singularly Perturbed Systems, IEEE Transactions On Circuits and Systems II:Express Briefs, 2008, 55(12): 1294-1295.

第 12 章　网络奇异系统的鲁棒控制

12.1　奇异时滞通信系统的 H_∞ 滤波

12.1.1　问题的提出与定义

奇异时滞通信系统的方程为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t) \\ y(t) = Cx(t) + D\nu(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \tag{12.1}$$

其中 $x(t) \in \mathcal{R}^n$ 是状态向量，$y(t) \in \mathcal{R}^m$ 是测量输出，$\omega(t) \in \mathcal{R}^p$ 和 $\nu(t) \in \mathcal{R}^q$ 是噪声，它们属于 $L_2[0,\infty)$ 空间，$z(t) \in \mathcal{R}^q$ 是要估计的信息，A, B, C, D, E 和 L 是已知矩阵，E 可能是奇异矩阵，设 $\mathrm{rank}E = r \leqslant n$。

我们用下面的满阶滤波器去估计 $z(t)$。

$$\begin{cases} E_F\dot{x}_F(t) = A_Fx_F(t) + B_F\tilde{y}(t) \\ z_F(t) = C_Fx_F(t) \end{cases} \tag{12.2}$$

其中 $x_F(t) \in \mathcal{R}^n$，$z_F(t) \in \mathcal{R}^q$，矩阵 $A_F \in \mathcal{R}^{n\times n}$，$B_F \in \mathcal{R}^{n\times m}$，$C_F \in \mathcal{R}^{q\times n}$ 和 $E_F \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 是待求的矩阵，E_F 可能是奇异的，设 $\mathrm{rank}E_F = r \leqslant n$。

标注 12.1　当数据通过信道时，传输时滞和丢包是不可避免的。为了把时滞和丢包描述清楚，假设：

(1) 采样器和量化器是时钟驱动的，零极点保持器是事件驱动的。

(2) 采样周期为 ϵ，其中 ϵ 是一个正有理数。零极点保持器的更新时刻记为 t_k $(k = 1,\cdots,\infty)$。

(3) 数据是以单包的形式在信道中传输的。

基于标注 12.1，我们用数学模型来描述传输时滞、丢包和量化问题。

首先，考虑传输时滞，设 t_k 时刻收到的数据延时时间为 τ_k，由零极点保持器的性质有

$$\tilde{y}(t) = y(t_k - \tau_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1} \tag{12.3}$$

由于网络允许信号的时滞时间是有限的，存在一个 τ 满足

$$0 < \tau_k \leqslant \tau$$

其次，把 t_k 和 t_{k-1} 时刻之间丢失的数据个数记为 δ_k，因网络允许的丢包数是一定的，令 $\bar{\delta}$ 为连续丢包最多的个数。由此可知

$$0 \leqslant \delta_k \leqslant \bar{\delta} \tag{12.4}$$

从上面的讨论再考虑 (12.3) 和 (12.4) 有

$$t_{k+1} - t_k = (\delta_{k+1} + 1)\epsilon + \tau_{k+1} - \tau_k \tag{12.5}$$

网络诱导时滞 $t_k - \tau_k$ 可以表示成

$$t_k - \tau_k = t - t + t_k - \tau_k = t - \tau(t) \tag{12.6}$$

其中

$$\tau(t) = t - t_k + \tau_k \tag{12.7}$$

根据式 (12.5) 得

$$0 < \epsilon \leqslant \tau(t) \leqslant \tau + (\bar{\delta} + 1)\epsilon = d \tag{12.8}$$

最后，选择密度最小的对数量化器来量化信号 [?, 1]

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}^j = \{\pm u_i^j : u_i^j = \rho_j^i u_0^j, i = \pm 1, \pm 2, \cdots\} \cup \{\pm u_0^j\} \cup \{0\} \\ &0 < \rho_j < 1, \quad u(0) > 0 \end{aligned} \tag{12.9}$$

其量化器 $f_j(\cdot)$ 定义为

$$f_j(v) = \begin{cases} u_i^j, & \dfrac{1}{1+\sigma_j} u_i^j < v \leqslant \dfrac{1}{1-\sigma_j} u_i^j, \quad v > 0 \\ 0, & v = 0 \\ -f_j(-v), & v < 0 \end{cases} \tag{12.10}$$

其中

$$\sigma_j = \frac{1 - \rho_j}{1 + \rho_j} \tag{12.11}$$

通过上面的分析，可以把网络时滞、丢包和量化用统一的式子表示，考虑文献 [1] 可得

$$\tilde{y}(t) = (I + \Lambda(t))y(t - \tau(t)) \tag{12.12}$$

其中

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \cdots, \Lambda_n(t)\}, \quad \Lambda_j(t) \in [-\sigma_j, \sigma_j] \tag{12.13}$$

标注 12.2 文献 [2] 第一次用该模型来描述带宽有限的网络控制系统，通过 Lyapunov-Krasovskii 方法得到了丢包数和时延之和允许的最大值，用上行界的方法处理量化误差问题。此模型很有研究意义，现在把它推广到奇异系统。

考虑 (12.1)、(12.2) 和 (12.12)，滤波误差系统可以表示为

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\xi}(t) = \bar{A}\xi(t) + \mathcal{M}\xi(t-\tau(t)) + \mathcal{B}\bar{\omega}(t) \\ e(t) = \bar{C}\xi(t) \\ \xi(t) = \phi(t), \quad t \in [-d, 0] \end{cases} \tag{12.14}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} = \bar{M} + \Delta\bar{M}, \quad \mathcal{B} = \bar{B} + \Delta\bar{B}, \quad e(t) = z(t) - z_F(t) \\ &\Delta\bar{M} = G\Delta(t)H_1, \quad \Delta\bar{B} = G\Delta(t)H_2, \quad 0 < \dot{\tau}(t) = \mu < 1 \\ &H_1 = [\,\Lambda C \quad 0\,], \quad H_2 = [\,0 \quad \Lambda D\,], \quad \bar{C} = [\,L \quad -C_F\,] \\ &\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_F \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_F D \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_F(t) \end{bmatrix} \\ &\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_F \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_F C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \nu(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \\ &\Delta(t) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ B_F \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.15}$$

定义 12.1

(1) 如果矩阵束 $(s\bar{E} - \bar{A})$ 正则，即存在 $s_0 \in \mathbb{C}$ 使得行列式 $\det(s_0\bar{E} - \bar{A}) \neq 0$，则称奇异系统 (12.14) 是正则的，或称矩阵对 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是正则的。

(2) 如果 $\deg\det(s\bar{E} - \bar{A}) = \mathrm{rank}\bar{E}$，则称奇异系统 (12.14) 是无脉冲的，或称矩阵对 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是无脉冲的。

定义 12.2

(1) 当 $\bar{\omega}(t) = 0$ 时，如果矩阵对 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是正则、无脉冲的，则奇异时滞系统 (12.14) 是正则、无脉冲的。

(2) 如果存在正数 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 和 $\bar{\gamma}$ 使可微函数 $V(t, \phi)$ 满足

$$\bar{\alpha}\|\xi(t)\| \leqslant V(t, \phi) \leqslant \bar{\beta}\|\xi(t)\|_c$$

并且它的导数满足

$$\dot{V}(t, \phi) \leqslant -\bar{\gamma}\|\xi(t)\|^2 < 0$$

其中 $\|\xi(t)\|_c = \sup\|\xi(t+\theta)\|$，当 $-d \leqslant \theta \leqslant 0$。

(3) 对任何初始 $\phi(t)$，如果存在 $\beta > 0$ 和 $a > 0$ 使奇异时滞系统的解 $\xi(t)$ 满足 $\|\xi(t)\|^2 \leqslant \mathrm{a}e^{-\beta t}\|\phi(t)\|^2$，则系统 (12.14) 是指数稳定的。

12.1.2 H_∞ 控制器设计

定理 12.1 给定常数 $\mu < 1$ 和 $\gamma > 0$，如果存在正数 ε 和矩阵 $\bar{Q} > 0, \hat{Q} > 0; \bar{Z} > 0, \hat{Z} > 0$，$P$ 且满足不等式 (12.16) 和 (12.17)，则滤波误差系统 (12.14) 满足正则、无脉冲、指数稳定，且具有 H_∞ 性能。

$$\bar{E}^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}\bar{E} \geqslant 0 \tag{12.16}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{(11)} & P^{\mathrm{T}}\bar{M} + \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} & 0 & P^{\mathrm{T}}\bar{B} & d^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z & \bar{C}^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}G \\ * & \Phi_{(22)} & \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} & \varepsilon H_1^{\mathrm{T}}H_2 & d^2\bar{M}^{\mathrm{T}}Z & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{(33)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I + \varepsilon H_2^{\mathrm{T}}H_2 & d^2\bar{B}^{\mathrm{T}}Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d^2Z & 0 & dZG \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{12.17}$$

其中

$$\begin{aligned} Z &= \bar{Z} + \hat{Z} \\ \Phi_{(11)} &= P^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + \bar{Q} - \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} \\ \Phi_{(22)} &= -(1-\mu)(\bar{Q} - \hat{Q}) - \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} - \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} + \varepsilon H_1^{\mathrm{T}}H_1 \\ \Phi_{(33)} &= -\hat{Q} - \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} \end{aligned}$$

证明 因为 $\mathrm{rank}\bar{E} = 2r \leqslant 2n$, 所以存在两个非奇异矩阵 L_1, $L_2 \in \mathcal{R}^{2n\times 2n}$ 使得

$$\begin{aligned} L_1\bar{E}L_2 &= \begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1\bar{A}L_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ L_1^{-\mathrm{T}}PL_2 &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad L_1^{-\mathrm{T}}\hat{Z}L_1^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.18}$$

把式 (12.18) 代入式 (12.16) 有 $P_{12} = 0$，从式 (12.17) 得

$$P^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P - \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} < 0 \tag{12.19}$$

由式 (12.18) 和式 (12.19) 可知

$$P_{22}^{\mathrm{T}}A_{22} + A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22} < 0 \tag{12.20}$$

从式 (12.20) 可得 A_{22} 是非奇异的，通过定义 12.1 知矩阵对 $(\bar{E}, \bar{A})$ 是正则、无脉冲的，再由定义 12.2 得系统 (12.14) 是正则无脉冲的。

为了证明当 $\bar{\omega}(t)=0$ 时滤波误差系统 (12.14) 是指数稳定的，引入下面的 Lyapunov-Krasovskii 函数：

$$V(\xi(t))=\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}P\xi(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(s)\bar{Q}\xi(s)\mathrm{d}s+\int_{t-d}^{t-\tau(t)}\xi^{\mathrm{T}}(s)\hat{Q}\xi(s)\mathrm{d}s$$
$$+d\int_{-d}^{-\tau(t)}\int_{t+\theta}^{t}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\bar{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+d\int_{-\tau(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\hat{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{12.21}$$

沿滤波误差系统 (12.14) 的轨迹对 $V(\xi(t))$ 进行求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t))\leqslant&2\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}P\dot{\xi}(t)+\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}\xi(t)-\xi^{\mathrm{T}}(t-d)\hat{Q}\xi(t-d)\\&+(1-\mu)\xi^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))(\hat{Q}-\bar{Q})\xi(t-\tau(t))-d\int_{t-d}^{t-\tau(t)}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\bar{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s\\&-d\int_{t-\tau(t)}^{0}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\hat{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s+d^{2}[\bar{E}\dot{\xi}(t)]^{\mathrm{T}}Z[\bar{E}\dot{\xi}(t)]\end{aligned} \tag{12.22}$$

由 Jenson 不等式可知

$$\begin{aligned}&-d\int_{t-d}^{t-\tau(t)}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\bar{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s\\&\leqslant\begin{bmatrix}\xi(t-\tau(t))\\\xi(t-d)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}&\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\\\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}&-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t-\tau(t))\\\xi(t-d)\end{bmatrix}-d\int_{t-\tau(t)}^{0}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]^{\mathrm{T}}\hat{Z}[\bar{E}\dot{\xi}(s)]\mathrm{d}s\\&\leqslant\begin{bmatrix}\xi(t-\tau(t))\\\xi(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}&\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}\\\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}&-\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t-\tau(t))\\\xi(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12.23}$$

同时考虑式 (12.17), 式 (12.22) 和式 (12.23) 有

$$\dot{V}(\xi(t))\leqslant\pi^{\mathrm{T}}(t)\left(\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&0\\ *&\Delta_{22}&\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\\ *&*&-\hat{Q}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}\\\bar{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}\\0\end{bmatrix}Z\begin{bmatrix}\bar{A}&\bar{\mathcal{M}}&0\end{bmatrix}\right)\pi(t)<0 \tag{12.24}$$

其中

$$\begin{aligned}\pi(t)&=\begin{bmatrix}\xi^{\mathrm{T}}(t)&\xi^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))&\xi^{\mathrm{T}}(t-d)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\\Delta_{11}&=P^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P+\bar{Q}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}\\\Delta_{12}&=P^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{M}}+\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}\\\Delta_{22}&=-(1-\mu)(\bar{Q}-\hat{Q})-\bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\end{aligned}$$

由定义 12.2 可以找到常数 $\lambda_0>0$ 使得 $\dot{V}(\xi(t))\leqslant-\lambda_0\|\xi(t)\|^2<0$。从 $V(\xi(t))$ 的定义可知存在常数 λ_1,λ_2 和 λ_3 满足

$$V(\xi(t))\leqslant\lambda_1\|\xi(t)\|^2+\lambda_2\int_{t-d}^{t}\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s+\lambda_3\int_{t-d}^{t}\|\xi(s-d)\|^2\mathrm{d}s \tag{12.25}$$

选择一个 $\beta>0$，定义新的函数

$$W(t)=\mathrm{e}^{\beta t}V(\xi(t)) \tag{12.26}$$

从式 (12.25) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\beta t}V(\xi(t))}{\mathrm{d}t}&=\mathrm{e}^{\beta t}[\beta V(\xi(t))+\dot{V}(\xi(t))]\\&\leqslant\mathrm{e}^{\beta t}[\beta\lambda_1\|\xi(t)\|^2+\beta\lambda_2\int_{t-d}^{t}\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s\\&\quad+\beta\lambda_3\int_{t-d}^{t}\|\xi(s-d)\|^2\mathrm{d}s-\lambda_0\|\xi(t)\|^2]\end{aligned} \tag{12.27}$$

对 (12.27) 进行 (0，t) 区间上的积分，同时考虑以下不等式：

$$\int_0^t\mathrm{e}^{\beta\theta}(\int_{\theta-d}^{\theta}\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}\theta\leqslant d\mathrm{e}^{\beta d}\int_0^t\mathrm{e}^{\beta s}\|\xi(t)\|^2\mathrm{d}s \tag{12.28}$$

可知

$$V(\xi(t))\leqslant\mathrm{e}^{-\beta t}V(\bar{\phi}(t))+\lambda\mathrm{e}^{-\beta t}\int_0^t\mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}s \tag{12.29}$$

其中

$$\lambda=\beta\lambda_1+\beta\lambda_2d\mathrm{e}^{\beta d}+\beta\lambda_3d\mathrm{e}^{2\beta d}-\lambda_0$$

可以找到一个足够小的数 $\beta>0$ 使 $\lambda\leqslant0$，考虑式 (12.21) 和式 (12.29) 用文献 [3] 中的方法可以找到一个 α 满足

$$V(\xi(t))\leqslant\alpha\sup_{-d'\leqslant s\leqslant0}\|\phi(s)\|^2\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{12.30}$$

因为矩阵对 $(\bar{E},A)$ 是正则、无脉冲的，所以式 (12.18) 等于

$$\tilde{E}=L_1\bar{E}L_2=\begin{bmatrix}I_{2r}&0\\0&0\end{bmatrix},\quad\tilde{A}=L_1\bar{A}L_2\begin{bmatrix}A_{2r}&0\\0&I_{2n-2r}\end{bmatrix},\quad\tilde{P}=L_1PL_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_{11}&0\\P_{21}&P_{22}\end{bmatrix} \tag{12.31}$$

定义

$$\tilde{\mathcal{M}} = L_1\mathcal{M}L_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\phi}(t) = L_2^{-1}\phi(t), \quad L_2^{-1}\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \tag{12.32}$$

于是式 (12.14) 等于

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1}(t) &= A_{2r}\xi_1(t) + M_{11}\xi_1(t-\tau(t)) + M_{12}\xi_2(t-\tau(t)) \\ 0 &= \xi_2(t) + M_{21}\xi_1(t-\tau(t)) + M_{22}\xi_2(t-\tau(t)) \end{aligned} \tag{12.33}$$

从式 (12.21) 和式 (12.33)，可得

$$V(\xi(t)) \geqslant \lambda_{\min}(P_{11}) \parallel \xi_1(t) \parallel^2 \tag{12.34}$$

考虑式 (12.30) 和式 (12.34) 有

$$\parallel \xi_1(t) \parallel^2 \leqslant \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(P_{11})} \sup_{-d\leqslant t\leqslant 0} \|\bar{\phi}(t)\|^2 \mathrm{e}^{-\beta t} \tag{12.35}$$

结合式 (12.24) 和式 (12.33)，可知

$$\begin{bmatrix} P_{22}^{\mathrm{T}} + P_{22} + \bar{Q}_2 & P_{22}^{\mathrm{T}}M_{22} \\ * & -(1-\mu)\bar{Q}_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} -\lambda_0 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.36}$$

为了研究 $\xi_2(t)$ 的指数稳定性，设

$$F(t) = \xi_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}_2\xi_2(t) - (1-\mu)\xi_2^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\bar{Q}_2\xi_2(t-\tau(t)) \tag{12.37}$$

在式 (12.33) 第 2 式的左边乘以 $2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}$ 知

$$0 = 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}\xi_2(t) + 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}M_{21}\xi_1(t-\tau(t)) + 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}M_{22}\xi_2(t-\tau(t)) \tag{12.38}$$

把式 (12.38) 加到式 (12.37) 的右边，同时考虑引理 11.2 得

$$\begin{aligned} F(t) =& \xi_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}_2\xi_2(t) + 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22} - (1-\mu)\xi_2^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\bar{Q}_2\xi_2(t-\tau(t))\xi_2(t) \\ &+ 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}M_{21}\xi_1(t-\tau(t)) + 2\xi_2^{\mathrm{T}}(t)P_{22}M_{22}\xi_2(t-\tau(t)) \\ \leqslant& \begin{bmatrix} P_{22}^{\mathrm{T}} + P_{22} + \bar{Q}_2 & P_{22}^{\mathrm{T}}M_{22} \\ * & -(1-\mu)\bar{Q}_2 \end{bmatrix} + \eta_1\xi_2^{\mathrm{T}}(t)\xi_2(t) \\ &+ \frac{1}{\eta_1}\xi_1^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))M_{21}^{\mathrm{T}}P_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}M_{21}\xi_1(t-\tau(t)) \end{aligned} \tag{12.39}$$

从式 (12.35)，式 (12.36) 和式 (12.39) 得

$$F(t) \leqslant -(\lambda_0 - \eta_1)\xi_2^{\mathrm{T}}(t)\xi_2(t) + \frac{1}{\eta_1}\zeta \mathrm{e}^{-\beta t} \tag{12.40}$$

其中 $\zeta=\lambda_{\max}^2(P_{22}M_{21})\dfrac{\alpha}{\lambda_{\min}(P_{11})}e^{\beta d'}\sup\limits_{-d\leqslant t\leqslant 0}\|\bar{\phi}(t)\|^2$

可以找一个足够小的数 η_1 满足 $\lambda_0-\eta_1>0$, 同时可以得到另一个常数 η_2 使得

$$\bar{Q}_2+(\lambda_0-\eta_1)I\geqslant(1+\eta_2)\bar{Q}_2 \tag{12.41}$$

从式 (12.37) 和式 (12.41) 有

$$\xi_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}_2\xi_2(t)\leqslant\varrho(1-\mu)\xi_2^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\bar{Q}_2\xi_2(t-\tau(t))+\frac{\varrho}{\eta_1}\zeta e^{-\beta t} \tag{12.42}$$

其中 $\varrho=\dfrac{1}{1+\eta_2}$

设 $f(t)=\xi_2^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}_2\xi_2(t)$, 则从式 (12.42) 可知

$$f(t)\leqslant\ \varrho(1-\mu)\sup_{t-d'\leqslant s\leqslant t}f(s)+\frac{\varrho}{\eta_1}\zeta e^{-\beta t} \tag{12.43}$$

由文献 [4] 中的引理 2 得

$$f(t)\leqslant\sup_{-d'\leqslant s\leqslant 0}f(s)e^{-\beta_0 t}+\frac{\zeta e^{-\beta_0 t}}{1-\varrho(1-\mu)e^{\beta_0 d'}} \tag{12.44}$$

其中 $\beta_0=\min\{\beta,\tau\}$，$0<\tau<-\left(\dfrac{1}{d'}\right)\ln[\varrho(1-\mu)]$。

从式 (12.44) 可得

$$\|\xi_2(t)\|^2\leqslant\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)\lambda_{\max}(\bar{Q}_2)\sup_{-d'\leqslant s\leqslant 0}\|\bar{\phi}(s)\|^2)e^{-\beta_0 t}+\frac{\zeta\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)e^{-\beta_0 t}}{1-\varrho(1-\mu)e^{-\beta_0 d'}} \tag{12.45}$$

考虑式 (12.35) 和式 (12.45)，系统 (12.14) 是指数稳定的。

为了研究滤波误差系统的 H_∞ 性能，令

$$J=\int_0^\infty[e^{\mathrm{T}}(t)e(t)-\gamma^2\bar{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\omega}(t)+\dot{V}(\xi(t))]dt+V(\xi(0))-V(\xi(\infty)) \tag{12.46}$$

因为滤波误差系统 (12.14) 是指数稳定的，所以

$$J\leqslant\int_0^\infty\zeta^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & P^{\mathrm{T}}\bar{B}+d^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z\bar{B}\\ * & \Pi_{22} & \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} & d^2\bar{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}Z\bar{B}\\ * & * & -\hat{Q}-\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} & 0\\ * & * & * & -\gamma^2I+d^2\bar{B}^{\mathrm{T}}Z\bar{B}\end{bmatrix}\zeta(t)dt \tag{12.47}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\zeta(t) &= [\,\xi^{\mathrm{T}}(t) \quad \xi^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)) \quad \xi^{\mathrm{T}}(t-d) \quad \bar{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\,]^{\mathrm{T}} \\
\Pi_{11} &= \dot{P}^{\mathrm{T}}\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + \bar{Q} - \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} + d^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z\bar{A} + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} \\
\Pi_{12} &= P^{\mathrm{T}}\bar{\mathcal{M}} + d^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z\bar{\mathcal{M}} + \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} \\
\Pi_{22} &= -(1-\mu)(\bar{Q}-\hat{Q}) - \bar{E}^{\mathrm{T}}\hat{Z}\bar{E} - \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E} + d^2\bar{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}}Z\bar{\mathcal{M}}
\end{aligned}
\tag{12.48}
$$

由 shur 补定理和式 (12.17) 得 (12.47)<0，从而可知对所有的非零干扰 $\bar{\omega}(t) \in L_2[0,\infty)$ 有 $J<0$，即

$$
\int_0^{\infty} e(t)^{\mathrm{T}}e(t)\mathrm{d}t \leqslant \gamma^2\left(\int_0^{\infty}\bar{\omega}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\omega}(t)\mathrm{d}t + \sigma\right) \tag{12.49}
$$

□

标注 12.3 定理 12.1 给出了滤波误差系统 (12.14) 满足正则、无脉冲、指数稳定和 H_∞ 性能的充分条件。然而，必须指出 (12.14) 中有非线性项，所以不能通过 (12.14) 用 MATLAB/LMI 工具箱求解滤波器参数。另外，当 $E=I$ 时，系统 (12.1) 就是标准系统，其指数稳定和具有 H_∞ 性能的条件是存在矩阵 $\bar{Q}>0$, $\hat{Q}>0$, $\hat{Z}>0$, $\bar{Z}>0$，$\bar{E}=I$ 使得式 (12.14) 成立。

为了解决标注 12.3 提出的问题，在定理 12.1 的基础上得到了下面的定理。

定理 12.2 如果存在矩阵 $\hat{Q}_{11}>0$, $\bar{Q}_{11}>0$, $\bar{Z}_{11}>0$, $\hat{Z}_{11}>0$, X, Y, A_f, B_f，C_f 使得式 (12.50) 和式 (12.51) 成立，则存在一个全阶滤波器使得滤波误差系统 (12.14) 满足正则、无脉冲、指数稳定，且具有 H_∞ 性能。

$$
\begin{aligned}
E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \\
E^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \\
E^{\mathrm{T}}(X-Y) \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{12.50}
$$

$$
\Theta = \begin{bmatrix}
\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & 0 & Y^{\mathrm{T}}B & 0 & d^2A^{\mathrm{T}}Z_{11} & L^{\mathrm{T}}-C_f^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & \Theta_{22} & \Theta_{23} & 0 & X^{\mathrm{T}}B & B_fD & d^2A^{\mathrm{T}}Z_{11} & L^{\mathrm{T}} & B_f \\
* & * & \Theta_{33} & E^{\mathrm{T}}\bar{Z}_{11}E & 0 & \varepsilon C^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda D & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \Theta_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & d^2B^{\mathrm{T}}Z_{11} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & \Theta_{66} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -d^2Z_{11} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I
\end{bmatrix} < 0
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&Z_{11} = \bar{Z}_{11} + \hat{Z}_{11}\\
&\Theta_{11} = Y^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}Y + \bar{Q}_{11} - E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E\\
&\Theta_{12} = Y^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}X + A_f^{\mathrm{T}} + \bar{Q}_{11} - E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E\\
&\Theta_{13} = E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E\\
&\Theta_{22} = X^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}X + \bar{Q}_{11} - E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E\\
&\Theta_{23} = B_fC + E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E\\
&\Theta_{33} = -(1-\mu)(\bar{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}) - E^{\mathrm{T}}\hat{Z}_{11}E - E^{\mathrm{T}}\bar{Z}_{11}E + \varepsilon C^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda C\\
&\Theta_{44} = -\bar{Q}_{11} - E^{\mathrm{T}}\bar{Z}_{11}E\\
&\Theta_{66} = -\gamma^2 I + \varepsilon D^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda D
\end{aligned}
\tag{12.51}
$$

此时可以找到矩阵 $S, \bar{S}, W$ 和 $\bar{W}$ 满足

$$
\begin{aligned}
E^{\mathrm{T}}\bar{S} = S^{\mathrm{T}}E, \quad EW = \bar{W}E^{\mathrm{T}}\\
XY^{-1} = I - \bar{S}W, \quad Y^{-1}X = I - \bar{W}S
\end{aligned}
\tag{12.52}
$$

则滤波器的参数为

$$
\begin{aligned}
E_F = E, \qquad A_F = S^{-\mathrm{T}}A_fY^{-1}W^{-1}\\
B_F = S^{-\mathrm{T}}B_f, \quad C_F = C_fY^{-1}W^{-1}
\end{aligned}
\tag{12.53}
$$

证明 由文献 [5] 可知存在非奇异矩阵 $S, \bar{S}, W$，$\bar{W}$ 使得式 (12.52) 成立。设

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1 = \begin{bmatrix} Y^{-1} & I \\ W & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\\
&P = \Lambda_2\Lambda_1^{-1} = \begin{bmatrix} X & \bar{S} \\ S & -SY^{-1}W^{-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix}\\
&\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{12.54}
$$

从文献 [5] 定理 1 的证明可得

$$
E = E_F, \quad \bar{E}^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}\bar{E} \geqslant 0 \tag{12.55}
$$

把式 (12.54) 中的 P 代入式 (12.55)，可得式 (12.50)，设

$$
\Sigma = \mathrm{diag}\,[\,\Lambda_1\Lambda_3 \quad \Lambda_1\Lambda_3 \quad \Lambda_1\Lambda_3 \quad I \quad I \quad I \quad I\,] \tag{12.56}
$$

$$
A_f = Y^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}A_F^{\mathrm{T}}S, \quad B_f = S^{\mathrm{T}}B_F, \quad C_f = Y^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}C_F \tag{12.57}
$$

在式 (12.17) 两端同乘以 Σ，令 $\bar{Z}_{22}$, $\hat{Z}_{22}$, $\bar{Q}_{22}$，$\hat{Q}_{22}$ 趋向于零，则式 (12.51) 成立。 □

标注 12.4　为了消去耦合项，文献 [2] 在 Lyapunov-Krasovskii 函数中引入了奇异矩阵 ($K=[I\quad 0]$)，如果在奇异系统中采用同样的方法，则 Lyapunov-Krasovskii $V(\xi(t))\geqslant 0$ 而不是 $V(\xi(t))>0$。为了解决这个问题令 $\bar{Z}_{22}$, $\hat{Z}_{22}$, $\bar{Q}_{22}$，$\hat{Q}_{22}$ 趋向于 0。

由于式 (12.50) 不是严格的线性矩阵不等式，所以很难用 MATLAB/LMI 去求解。下面用矩阵分解的方法，把线性矩阵不等式转化为严格的线性矩阵不等式。

推论 12.1　如果存在矩阵 $X=\Omega E+\Phi\Upsilon, Y=\Gamma E+\Phi\Xi$, $\bar{Q}_{11}>0$，$\hat{Q}_{11}>0$，$\Omega>0$，$\Gamma>0$, $\bar{Z}_{11}>0$，$\hat{Z}_{11}>0$，Υ，Ξ，A_f, B_f 和 C_f 使得式 (12.51) 和式 (12.58) 成立，则存在一个全阶滤波器使得滤波误差系统 (12.14) 满足正则、无脉冲、指数稳定，且具有 H_∞ 性能。

$$\Omega-\Gamma>0 \tag{12.58}$$

证明　因为 $\mathrm{rank}E=r$，则存在非奇异矩阵 L_3 和 $L_4\in\mathcal{R}^{n\times n}$ 满足

$$L_3EL_4=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{12.59}$$

在 (12.50) 两端同时乘以 L_4^{T} 和 L_4 得

$$L_3^{-\mathrm{T}}XL_4=\begin{bmatrix} X_{11} & 0\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix},\quad X_{11}>0 \tag{12.60}$$

设

$$\Phi=L_3^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0\\ I_{n-r}\end{bmatrix}\$ \tag{12.61}$$

其中 $\$\in\mathcal{R}^{(n-r)\times(n-r)}$，有

$$\begin{aligned}X&=L_3^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X_{11} & 0\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}L_4^{-1}\\ &=L_3^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X_{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}L_3L_3^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}L_4^{-1}+L_3^{T}\begin{bmatrix} 0\\ I_{n-1}\end{bmatrix}\$\$^{-1}\begin{bmatrix} X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}L_4^{-1}\\ &=\Omega E+\Phi\Upsilon\end{aligned} \tag{12.62}$$

其中

$$\Omega=L_3^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X_{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}L_3>0,\quad \Upsilon=\$^{-1}\begin{bmatrix} X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}L_4^{-1} \tag{12.63}$$

同理可得矩阵 Γ，Φ 使得

$$Y = \Gamma E + \Phi \Xi \tag{12.64}$$

从上面的讨论有

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{T}} X &= E^{\mathrm{T}}(\Omega E + \Phi \Upsilon) = (\Omega E + \Phi \Upsilon)^{\mathrm{T}} E = X^{\mathrm{T}} E \geqslant 0 \\ E^{\mathrm{T}} Y &= E^{\mathrm{T}}(\Gamma E + \Phi \Xi) = (\Gamma E + \Phi \Xi)^{\mathrm{T}} E = Y^{\mathrm{T}} E \geqslant 0 \\ E^{\mathrm{T}}(X - Y) &= E^{\mathrm{T}}(\Omega - \Gamma) E \geqslant 0 \end{aligned} \tag{12.65}$$

□

12.1.3 数值例子

(稳定性分析) 考虑下面的奇异时滞系统:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -1.1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

一方面考虑保守性，表 12.1 列出了用文献 [6]~[10] 和定理 12.1($\mu = 0$) 求得的时滞允许的上界。通过比较很容易看出定理 12.1 的保守性要小得多。

表 12.1 时滞相关系统保守性比较

方法	最大允许时滞	变量个数
文献 [7]	0.5567	18
文献 [8]	0.8708	28
文献 [9]	0.9680	24
文献 [10]	1.0660	25
定理 3.1	1.0660	16

另一方面，考虑最大允许的 d 和 μ 的关系。通信系统中的信号时滞和丢包是时变的，所以文献 [6]~[10] 中的方法不能用来解决时滞和丢包问题。而表 12.2 显示了最大允许的 d 随着 μ 的增加而减小。

表 12.2 时滞相关系统中 $\mu(t)$ 的分析

μ	0	0.2	0.4	0.6
最大允许的时滞	1.0660	1.0305	0.9975	0.9662

(H_∞ 性能分析) 考虑 (12.1) 中描述的系统，其系统参数描述如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.1 \quad 0], \quad D = 0.1, \qquad L = [-1 \quad 0]$$

在求滤波器参数之前假设系统的采样时间为 $\epsilon = 100\text{ms}$，时滞的上界为 $\tau = 400\text{ms}$，并设 $\gamma = 1.8$, $d = 0.5$, $\rho = 0.9$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由推论 12.1 可得

$$A_f = \begin{bmatrix} 1.0661 & 0.0026 \\ -0.0002 & 16.9946 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -2.5293 \\ -0.0555 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} -0.9995 & -0.0237 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1.6429 & 0.0313 \\ 0.0313 & 37.8780 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1.2791 & 0.0251 \\ -0.0251 & 14.8975 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_{11} = \begin{bmatrix} 4.4403 & 3.0102 \\ 3.0102 & 25.5397 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z}_{11} = \begin{bmatrix} 6.2341 & 4.0635 \\ 4.0635 & 25.8627 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 1.0061 & -0.0016 \\ -0.0016 & 17.8047 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 43.1645$$

$$\bar{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 0.1610 & -0.0029 \\ -0.0029 & 30.5685 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0.6771 & 34.0682 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} 1.6151 & 34.0217 \end{bmatrix}$$

为了设计滤波器，设

$$S = \bar{S} = \Omega E + \Phi \Upsilon = \begin{bmatrix} 1.6429 & 0 \\ 1.6464 & 34.0217 \end{bmatrix}, \quad W = \bar{W} = \begin{bmatrix} -1.0546 & 0.1915 \\ 0.1915 & -1.5641 \end{bmatrix}$$

由式 (12.53) 可知

$$A_F = \begin{bmatrix} -0.4981 & -0.0516 \\ 0.0061 & -0.0086 \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} -1.5379 \\ -0.0016 \end{bmatrix}, \quad C_F = \begin{bmatrix} 0.7575 & 0.0932 \end{bmatrix}$$

表 12.3　不同 δ 下的 γ 最小允许值 (设 $\mu = 0.2$, $\rho = 0.95$)

δ	0	1	2	3
γ 最小允许值	1.5142	1.5551	1.5791	1.5942

首先，讨论最小的 γ 与丢包的关系，由表 12.3 可得 γ 的最小值随着丢包数的增加而增大，这说明丢包会破坏系统的 H_∞ 性能。

表 12.4　不同 μ 下的 γ 最小允许值 (设 $\rho = 0.95$, $d = 0.5$)

μ	0	0.2	0.4	0.6
γ 最小允许值	1.5872	1.5551	1.4023	1.2552

其次，分析 γ 的最小值和 μ 的关系，从表 12.4 可知 γ 的最小值随着 μ 的增加而减小，这说明当 μ 变大时，系统的 H_∞ 性能增强了。

表 12.5 不同 ρ 下的 γ 最小允许值 (设 $\mu=0.2$, $d=0.5$)

ρ	0.95	0.85	0.75	0.65
γ 最小允许值	1.5551	1.5557	1.5598	1.5643

最后，讨论 γ 的最小值和量化密度的关系，表 12.5 显示 γ 的最小值随着量化密度的减小而变大，这说明量化密度的减少会降低系统的 H_∞ 性能。

12.2 具有丢包的离散奇异系统降维 H_∞ 滤波器

12.2.1 问题描述

系统模型如图 12.1 所示。

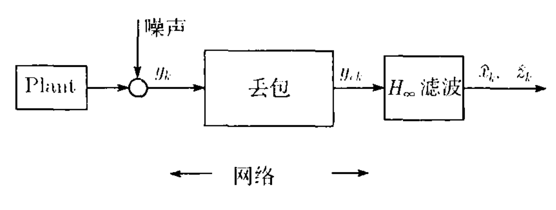


图 12.1 滤波器模型

根据图 12.1 建立如下离散奇异系统：

$$Ex_{k+1}=Ax_k+A_w w_k \tag{12.66}$$

$$z_k=Lx_k+L_w w_k \tag{12.67}$$

其中 $x_k\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量；$w(k)\in\mathbb{R}^w$ 属于 $l_2[0,\infty)$ 的干扰输入向量；$z_k\in\mathbb{R}^q$ 为估计状态向量；A, A_w, L 和 L_w 是已知实常矩阵，矩阵 E 可能是奇异的，我们假设 $\text{rank}E=r\leqslant n$。数据丢包的描述如下：

$$\begin{cases} y_k=Cx_k+Dv_k \\ y_{ck}=(1-\theta_k)y_k+\theta_k y_{k-1} \end{cases} \tag{12.68}$$

其中 $y_k\in\mathbb{R}^p$ 为输出向量，$y_{ck}\in\mathbb{R}^p$ 为测量输出向量，$v_k\in\mathbb{R}^v$ 属于 $l_2[0,\infty)$ 的测量噪声，C 是已知实常矩阵；随机变量 θ_k 是取值“0”或者“1”的贝努利二项分布，当 k 时刻的数据发生丢失时，$\theta_k=1$，当 k 时刻的数据没有丢失时，$\theta_k=0$。我们有如下描述：

$$\text{Prob}\{\theta_k=1\}\equiv\mathcal{E}\{\theta_k\}=\rho \tag{12.69}$$

$$\text{Prob}\{\theta_k=0\}\equiv\mathcal{E}\{1-\theta_k\}=1-\rho \tag{12.70}$$

其中 $\rho\in[0,1]$ 是已知常数。

标注 12.5　从文献 [11]、[12] 知，马尔可夫链可以描述网络控制的丢包问题，马尔可夫链把传输的信息包分成丢失的包和接收到的包两种分表用 L 表示丢包，用 R 表示接收到的包。$\theta_k \in \{L, R\}$。表示信息传输过程中丢包和接收到包的概率。因此，一个马尔可夫链包括表示各种状态丢包情况的变化过程。在式 (12.69) 和式 (12.70) 中 [13]，用取值为 0 和 1 的伯努利二项分布描述丢包问题。即只考虑 $\theta_k = 1$ 或 $\theta_k = 0$ 的两种丢包情况，实际上这种模型没有文献 [11]、[12] 精确。但是，在描述网络丢包问题时仍然广泛采用伯努利二项分布[13~15]。因为它具有简单易行的优点。文献 [14] 首先提出的式 (12.69) 和式 (12.70) 这种模型来描述传输迟延和广域网内有效带宽的丢包问题 [16]。

标注 12.6　在 k 时刻，输出向量 y_k 通过传输信道传递给观测器。如果没有丢包发生，测量输出向量 y_{ck} 等于 y_k；否则，y_{ck} 等于 y_{k-1}。丢包概率用 ρ 表示，y_{ck} 在 (12.69) 中，即取值为 y_k 时概率为 $1-\rho$，取值为 y_{k-1} 时，概率为 ρ。

我们采用如下定义。

定义 12.3 [13]　当 $w_k = 0$，如果存在常量 $\alpha > 0$ 和 $\tau \in (0,\ 1)$，且满足

$$\mathcal{E}\{\|x_k\|^2\} \leqslant \alpha\tau^k\mathcal{E}\{\|x_0\|^2\}, \qquad 对于所有的 x_0 \in \mathbb{R}^n,\ k \in Z^+$$

则奇异系统 (12.66) 是指数均方稳定的。

定义 12.4 [17]

(1) 如果 $\det(zE - A)$ 全不为零，$w_k = 0$ 的奇异系统 (12.66) 是正则的，即 $(E,\ A)$ 是正则的。

(2) 如果 $\deg(\det(zE - A))=\operatorname{rank} E$，$w_k = 0$ 的奇异系统 (12.66) 是因果的，即 $(E,\ A)$ 是因果的。

(3) 如果 $\sigma(E,\ A) \subset D_{\text{int}}(0,\ 1)$，$w_k = 0$ 的奇异系统 (12.66) 是稳定的，即 $(E,\ A)$ 是稳定的。

(4) 如果 $(E,\ A)$ 是正则，因果，稳定的，$w_k = 0$ 的奇异系统 (12.66) 是正则，因果，稳定的。

定义 12.5　如果奇异系统 (12.66) 是正则，因果，指数均方稳定的，它必是指数均方稳定的。

对于迟延传感器 (12.68)，我们取 $x_{-1} = 0$，则 $y_{-1} = 0$。

我们考虑如下降维滤波器，这里 $\hat{n}$ 表示 z_k 的维数：

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_f\hat{x}_k + B_f y_{ck} \\ \hat{z}_k = C_f\hat{x}_k + D_f y_{ck} \end{cases} \tag{12.71}$$

其中 $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$,，$\hat{z}_k \in \mathbb{R}^q$，并且 $\hat{n} \leqslant n$。A_f，B_f，C_f 和 D_f 实常矩阵。结合式 (12.66)~(12.68) 和式 (12.71) 动态滤波误差模型如下：

$$\begin{cases} \bar{E}\bar{x}_{k+1} = \mathcal{A}(\theta_k)\bar{x}_k + \mathcal{A}_1(\theta_k)H\bar{x}_{k-1} + \mathcal{A}_\varpi(\theta_k)\varpi_k \\ \bar{z}_k = \mathcal{L}(\theta_k)\bar{x}_k + \mathcal{L}_1(\theta_k)H\bar{x}_{k-1} + \mathcal{L}_\varpi(\theta_k)\varpi_k \end{cases} \tag{12.72}$$

其中

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k^{\mathrm{T}} & \hat{x}_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \bar{z}_k = z_k - \hat{z}_k, \varpi_k = \begin{bmatrix} w_k^T & v_k^T & v_{k-1}^T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, H = \begin{bmatrix} I, & 0 \end{bmatrix} \tag{12.73}$$

$$\begin{cases} \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \mathcal{A}(\theta_k) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ (1-\theta_k)B_fC & A_f \end{bmatrix}, \mathcal{A}_1(\theta_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_k B_f C \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}_\varpi(\theta_k) = \begin{bmatrix} A_w & 0 & 0 \\ 0 & (1-\theta_k)B_fD & -\theta_k B_f D \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_\varpi(\theta_k) = [L_w \quad -(1-\theta_k)D_fD \quad -\theta_k D_f D] \\ \mathcal{L}(\theta_k) = [L-(1-\theta_k)D_fC, \quad -C_f], \ \mathcal{L}_1(\theta_k) = -\theta_k D_f C \end{cases} \tag{12.74}$$

本书设计 (12.71) 这种滤波器用来解决 H_∞ 滤波问题。已知标量 γ 和非零 ϖ_k，在零初始状态下是正则，因果，并且指数均方稳定的。$\bar{z}_k$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{\|\bar{z}_k\|^2\} \leqslant \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\varpi_k\|^2 \tag{12.75}$$

则奇异系统 (12.72) 是指数均方稳定的，并满足 H_∞ 性能。

标注 12.7 我们假定离散奇异系统 (12.66) 是正则，因果和稳定的。当 $\hat{n}$ 满足 $\hat{n} \leqslant n$ 时系统 (12.71) 是稳定的。

标注 12.8 如果 $\hat{n} = 0$，降维滤波器 (12.71) 变成

$$\hat{z}_k = D_f y_{ck} \tag{12.76}$$

降维 H_∞ 滤波问题变成静态或者零维 H_∞ 滤波问题。

引理 12.1 给定常数 $\gamma > 0$，如果存在矩阵 P 和 Q 满足式 (12.77) 则式 (12.72) 是均方指数允许的且具有 H_∞ 性能

$$\bar{E}^{\mathrm{T}} P \bar{E} \geqslant 0 \tag{12.77}$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 & P\mathcal{A}(\rho) & P\mathcal{A}_1(\rho) & P\mathcal{A}_\varpi(\rho) \\ * & I & \mathcal{L}(\rho) & \mathcal{L}_1(\rho) & \mathcal{L}_\varpi(\rho) \\ * & * & \bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E} - H^TQH & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 \\ * & * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{12.78}$$

其中 $*$ 表示对称矩阵中的对称项的转置矩阵。

证明　首先，根据系统 (12.72) 中 $\varpi_k = 0$ 的情况，我们建立一个正则，因果的离散系统。这种情况下，动态方程 (12.72) 变成

$$\bar{E}\bar{x}_{k+1} = \mathcal{A}(\theta_k)\bar{x}_k + \mathcal{A}_1(\theta_k)H\bar{x}_{k-1} \tag{12.79}$$

设

$$X_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k^T & \bar{x}_{k-1}^T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12.80}$$

则系统 (12.79) 写成下面形式：

$$\hat{E}X_{k+1} = \hat{A}X_k \tag{12.81}$$

其中

$$\hat{E} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{E} & 0_{(\hat{n}+n)\times(\hat{n}+n)} \\ \hline 0_{(\hat{n}+n)\times(\hat{n}+n)} & I_{(\hat{n}+n)\times(\hat{n}+n)} \end{array}\right], \quad \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\theta_k) & \mathcal{A}_1(\theta_k)H \\ \hline I_{(\hat{n}+n)\times(\hat{n}+n)} & 0_{(\hat{n}+n)\times(\hat{n}+n)} \end{array}\right] \tag{12.82}$$

很容易看出系统 (12.79) 是正则，因果系统且等价于系统 (12.81)。现在，我们证明系统 (12.81) 是正则，因果的。根据式 (12.74) 和式 (12.82)，我们得到

$$\begin{aligned} &\det\,(z\hat{E} - \hat{A}) \\ &= z^{\hat{n}+n} \cdot \det(z\bar{E} - \mathcal{A}(\theta_k) - z^{-1}\mathcal{A}_1(\theta_k)H) \\ &= z^{\hat{n}+n} \cdot \begin{vmatrix} zE - A & 0 \\ -(1-\theta_k + z^{-1}\theta_k)B_fC & zI - A_f \end{vmatrix} \\ &= z^{\hat{n}+n} \cdot |zE - A| \cdot |zI - A_f| \end{aligned} \tag{12.83}$$

从标注 12.6，可以得到 $(E,\ A)$ 是正则, 因果和稳定的并且 A_f 是 Hurwitz, 这意味着存在一个充分大的 z，满足 $|zE - A| \neq 0$ 和 $|zI - A_f| \neq 0$。因此，存在一个标量 $z \in \mathcal{C}$ 使 $\det(z\hat{E} - \hat{A}) \neq 0$，这意味着 $(\hat{E},\ \hat{A})$ 是正则的，因为，系统 (12.79) 是正则的。从 (12.83)，我们能够得到下式：

$$\begin{aligned} \deg(\det(z\hat{E} - \hat{A})) &= 2\hat{n} + n + \operatorname{rank}E \\ &= \operatorname{rank}\bar{E} + \hat{n} + n = \operatorname{rank}\hat{E} \end{aligned}$$

因此，根据定义 12.4，如果 $(E,\ A)$ 是因果的，则意味着系统 (12.79) 是因果的。

接下来, 我们将证明系统 (12.79) 是指数均方稳定的。定义 Lyapunov 方程如下：

$$V_k = \bar{x}_k^{\mathrm{T}}\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E}\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1}^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}QH\bar{x}_{k-1} \tag{12.84}$$

$\mathcal{F}_k$ 是 $\{\hat{x}_i,\ 0\leqslant i\leqslant k\}$ 形成的最小 σ- 代数。通过式 (12.79) 和式 (12.84)，得到

$$\mathcal{E}\{V_{k+1}|\mathcal{F}_k\}-V_k=\eta_k^{\mathrm{T}}\Omega\eta_k \tag{12.85}$$

其中

$$\eta_k=\begin{bmatrix}\bar{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{k-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\varOmega=\begin{bmatrix}\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(\rho)P\mathcal{A}(\rho)+H^TQH-\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E} & \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(\rho)P\mathcal{A}_1(\rho)\\ * & \mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)P\mathcal{A}_1(\rho)-Q\end{bmatrix}$$

我们由式 (12.78) 和 Schur 补引理得到 $\varOmega<0$，结合式 (12.85) 得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\{V_{k+1}|\mathcal{F}_k\}-V_k\\&=\eta_k^{\mathrm{T}}\varOmega\eta_k\leqslant-\lambda_{\min}(\varOmega)\eta_k^{\mathrm{T}}\eta_k<-\alpha\eta_k^{\mathrm{T}}\eta_k\end{aligned}\tag{12.86}$$

其中

$$0<\alpha<\min\{\lambda_{\min}(-\varOmega),\ \sigma\}$$

$$\sigma=\max\{\lambda_{\max}(\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E}),\ \lambda_{\max}(Q)\}$$

因此，通过引理 12.1[13] 推出系统 (12.79) 是指数均方稳定的.。

最后, 我们将证明 $\tilde{z}_k$ 满足式 (12.75)。令

$$J_N=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathcal{E}\{\|\tilde{z}_k\|^2\}-\gamma^2\|\varpi_k\|^2\right] \tag{12.87}$$

这里 N 是正整数。

对于任意非零 $\varpi_k\in l_2[0,+\infty)$ 且初始状态为 0，我们有式 (12.88) 成立

$$\begin{aligned}J_N=&\sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathcal{E}\{\|\tilde{z}_k\|^2\}-\gamma^2\|\varpi_k\|^2+\mathcal{E}\{V_{k+1}-V_k\}\right]\\&+\mathcal{E}V_0-\mathcal{E}V_N\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{E}\{\xi_k^{\mathrm{T}}\mathcal{N}(\rho)\xi_k\}\end{aligned}\tag{12.88}$$

其中

$$\xi_k=\begin{bmatrix}\bar{x}_k^{\mathrm{T}}, & x_{k-1}^{\mathrm{T}}, & \varpi_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12.89}$$

$$\mathcal{N}(\rho)=\begin{bmatrix}\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \mathcal{A}_1^{\mathrm{T}}(\rho)\\ \mathcal{A}_\varpi^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}\mathcal{A}(\rho) & \mathcal{A}_1(\rho) & \mathcal{A}_\varpi(\rho)\end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} \mathcal{L}^{\mathrm{T}}(\rho) \\ \mathcal{L}_1^{\mathrm{T}}(\rho) \\ \mathcal{L}_{\varpi}^{\mathrm{T}}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\rho) & \mathcal{L}_1(\rho) & \mathcal{L}_{\varpi}(\rho) \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} H^{\mathrm{T}}QH-\bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E} & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \tag{12.90}
$$

根据式 (12.78) 和 Schur 补引理得到 $\mathcal{N}(\rho)<0$。这意味着对于任意 N，$J_N<0$，推出 $\bar{z}_k$ 满足式 (12.75)。结论得证。 □

标注 12.9 引理 12.1 提出了得到均方可行解的充分条件并且得到动态滤波误差系统 (12.72) 的 H_∞ 性能。式 (12.78) 是一个非线性矩阵不等式, 它不能用 MATLAB/LMI 工具箱求解滤波器参数。并且当 $E=I$ 时，奇异系统 (12.66) 变成标准状态空间方程，相应的不等式 (12.78) 给出的均方稳定状态和 H_∞ 性能用条件 $P>0,Q>0$ 代替且 $\bar{E}$ 用 I 代替。

接下来，我们分析标注 12.7 提出的零维滤波问题。结合零维滤波器 (12.76) 和系统 (12.66)，得到相应动态滤波误差表达式如下:

$$
\begin{cases} Ex_{k+1}=Ax_k+A_{z\varpi}\varpi_k \\ \bar{z}_k=L_z(\theta_k)x_k+L_{z1}(\theta_k)x_{k-1}+L_{z\varpi}(\theta_k)\varpi_k \end{cases} \tag{12.91}
$$

其中

$$
A_{z\varpi}=\begin{bmatrix} A_w & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad L_z(\theta_k)=L-(1-\theta_k)D_fC
$$
$$
L_{z1}(\theta_k)=-\theta_kD_fC,\quad L_{z\varpi}(\theta_k)=\begin{bmatrix} L_w & -(1-\theta_k)D_fD & -\theta_kD_fD \end{bmatrix}
$$

类似引理 12.1，我们提出均方稳定和零维动态滤波器 (12.91) 的 H_∞ 性能有如下引理成立。

引理 12.2 给定标量 $\gamma>0$，如果存在矩阵 P 和 Q 使式 (12.92) 成立，则奇异系统 (12.91) 是指数均方稳定的并具有保 H_∞ 性能

$$
E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0 \tag{12.92}
$$

$$
\begin{bmatrix} P & 0 & PA & 0 & PA_{z\varpi} \\ * & I & L_z(\rho) & L_{z1}(\rho) & L_{z\varpi}(\rho) \\ * & * & E^TPE-Q & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 \\ * & * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix}>0 \tag{12.93}
$$

其中含 ρ 的矩阵是把 (12.91) 中的 θ_k 用 ρ 替换的。

证明 证明结论很容易通过引理 12.1 得到。

12.2.2 降维 H_∞ 滤波问题

这一部分我们分别通过引理 12.1 和引理 12.2 得到降维和零维 H_∞ 滤波问题的解。

为了解决我们的主要问题，我们先引入下面的引理。

引理 12.3 [18,19] 给定对称矩阵 $\varLambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 和矩阵 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 且 rank $\mathcal{X} < n$ 和 rank $\mathcal{Y} < n$。当含有 Δ 的矩阵符合下列不等式时：

$$\varLambda + \mathcal{X}\Delta\mathcal{Y} + (\mathcal{X}\Delta\mathcal{Y})^{\mathrm{T}} > 0 \tag{12.94}$$

则等价于式 (12.94) 且消除 Δ 的充分必要条件是式 (12.95)

$$\mathcal{X}^{\perp}\varLambda\mathcal{X}^{\perp\mathrm{T}} > 0, \quad (\mathcal{Y}^{\mathrm{T}})^{\perp}\varLambda(\mathcal{Y}^{\mathrm{T}})^{\perp\mathrm{T}} > 0 \tag{12.95}$$

现在，我们给出解决降维 H_∞ 滤波问题的充分条件如下。

定理 12.3 如果存在矩阵 $X > 0$, $Y > 0$ 和矩阵 $Q > 0$ 满足下式，则奇异系统 (12.72) 存在 $\hat{n}$ 维 H_∞ 滤波器。

$$E^{\mathrm{T}}XE \geqslant 0 \tag{12.96}$$

$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0 \tag{12.97}$$

$$\begin{bmatrix} Y & YA & 0 & YA_w & 0 & 0 \\ A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}}YE-Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ A_w^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{12.98}$$

$$\mathcal{M}(\rho)\left[\begin{array}{cc|c|ccc} X & 0 & XA & XA_w & 0 & 0 \\ 0 & I & L & L_w & 0 & 0 \\ \hline A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} & L^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}}XE & 0 & 0 & 0 \\ \hline A_w^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} & L_w^{\mathrm{T}} & 0 & \gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{array}\right]\mathcal{M}^{\mathrm{T}}(\rho) > 0 \tag{12.99}$$

$$X - Y \geqslant 0 \tag{12.100}$$

和

$$\mathrm{rank}(X - Y) \leqslant \hat{n} \tag{12.101}$$

其中

$$\mathcal{M}(\rho)=\left[\begin{array}{cc|c|ccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (1-\rho)C^{\mathrm{T}\perp} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\rho)D^{\mathrm{T}\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho D^{\mathrm{T}\perp} \end{array}\right]$$

这里求解 $\hat{n}$ 维滤波器所有参数的问题转化成求解 (12.96)~(12.101) 中的 $(X,\ Y,\ Q)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} D_f & C_f \\ B_f & A_f \end{bmatrix} = & [-W^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\Pi\Phi_r^{\mathrm{T}}(\Phi_r\Pi\Phi_r^{\mathrm{T}})^{-1} \\ & +W^{-1}\Xi^{\frac{1}{2}}\Upsilon(\Phi_r\Pi\Phi_r^{\mathrm{T}})^{-\frac{1}{2}}]\Phi_l^{+} + \Theta - \Theta\Phi_l\Phi_l^{+} \end{aligned} \tag{12.102}$$

其中

$$\Xi = W - \Psi^{\mathrm{T}}\left[\ \Pi - \Pi\Phi_r^{\mathrm{T}}(\Phi_r\Pi\Phi_r^{\mathrm{T}})^{-1}\Phi_r\Pi\ \right]\Psi$$
$$\Pi = (\Psi W^{-1}\Psi^{\mathrm{T}} - \Omega_x)^{-1}$$

$$\Omega_x=\left[\begin{array}{cc|c|cc|c|ccc} X & X_1 & 0 & XA & 0 & 0 & XA_w & 0 & 0 \\ X_1^{\mathrm{T}} & X_2 & 0 & X_1^{\mathrm{T}}A & 0 & 0 & X_1^{\mathrm{T}}A_w & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & L & 0 & 0 & L_w & 0 & 0 \\ \hline A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}}X_1 & L^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}}XE-Q & E^{\mathrm{T}}X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_1^{\mathrm{T}}E & X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ \hline A_w^{\mathrm{T}}X & A_w^{\mathrm{T}}X_1 & L_w^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{array}\right]$$

$$\Psi=\begin{bmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & X_2 \\ -I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1-\rho)C & 0 & \rho C & 0 & (1-\rho)D & \rho D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θ 是任意实常矩阵；Υ 任意满足 $\bar{\sigma}(\Upsilon) < 1$ 的矩阵，其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 是矩阵的最大奇异值；Φ_l 和 Φ_r 是任意满秩矩阵且 $\Phi = \Phi_l\Phi_r$；Φ_l^+ 是 Φ_l 的共轭转置矩阵。并且 $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times\hat{n}}$，$X_2 \in \mathbb{R}^{\hat{n}\times\hat{n}}$，$W > 0$ 和 $X_2 > 0$ 满足

$$\Pi > 0, \quad X - Y = X_1X_2^{-1}X_1^{\mathrm{T}} \geqslant 0$$

证明 从式 (12.77) 和式 (12.78) 得到正定对称矩阵 P。设

$$P = \begin{bmatrix} X & X_1 \\ X_1^{\mathrm{T}} & X_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z_1 \\ Z_1^{\mathrm{T}} & Z_2 \end{bmatrix} \tag{12.103}$$

我们从式 (12.77) 得到

$$\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}}XE & E^{\mathrm{T}}X_1 \\ X_1^{\mathrm{T}}E & X_2 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{12.104}$$

即有式 (12.105) 成立

$$E^{\mathrm{T}}XE \geqslant 0, \quad X_2 \geqslant 0 \tag{12.105}$$

$$E^{\mathrm{T}}(X - X_1X_2^{-1}X_1^{\mathrm{T}})E \geqslant 0 \tag{12.106}$$

通过计算得到

$$Z^{-1} = X - X_1X_2^{-1}X_1^{\mathrm{T}} \tag{12.107}$$

另一方面, 通过式 (12.74) 和式 (12.78) 得到矩阵 $\mathcal{A}(\rho)$, $\mathcal{A}_1(\rho)$, $\mathcal{L}(\rho)$ 和 $\mathcal{L}_1(\rho)$ 表达式如下：

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\rho) = \bar{A} + \bar{F}G\bar{H}(\rho), \quad \mathcal{A}_1(\rho) = \bar{F}G\bar{N}(\rho) \\ &\mathcal{L}(\rho) = \bar{L} + \bar{S}G\bar{H}(\rho), \quad \mathcal{L}_1(\rho) = \bar{S}G\bar{N}(\rho) \\ &\mathcal{A}_\varpi(\rho) = \bar{A}_\varpi + \bar{F}G\bar{H}_\varpi(\rho), \quad \mathcal{L}_\varpi(\rho) = \bar{L}_\varpi + \bar{S}G\bar{H}_\varpi(\rho) \end{aligned} \tag{12.108}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = [L \quad 0], \quad G = \begin{bmatrix} D_f & C_f \\ B_f & A_f \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_\varpi = \begin{bmatrix} A_w & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_\varpi = [L_w \quad 0 \quad 0]$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = [-I \quad 0], \quad \bar{H}(\rho) = \begin{bmatrix} (1-\rho)C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_\varpi(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & (1-\rho)D & \rho D \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用式 (12.108) 代替不等式 (12.78)，根据引理 12.1 我们得到

$$\Omega_c + \Psi_c G \Phi_c + (\Psi_c G \Phi_c)^{\mathrm{T}} > 0 \tag{12.109}$$

其中

$$\Omega_c = \begin{bmatrix} P & 0 & P\bar{A} & 0 & P\mathcal{A}_w \\ * & I & \bar{L} & 0 & L_w \\ * & * & \bar{E}^T P \bar{E} - H^T Q H & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 \\ * & * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad \Psi_c = \begin{bmatrix} P\bar{F} \\ \bar{S} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.110}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{H}(\rho) & \bar{N}(\rho) & \bar{H}_{\varpi}(\rho) \end{bmatrix}$$

通过引理 12.3，很容易得到不等式 (12.109) 的充分必要条件是 G 同时满足下面两个不等式：

$$\Psi_c^{\perp} \Omega_c \Psi_c^{\perp \mathrm{T}} > 0 \tag{12.111}$$

$$\Phi_c^{\mathrm{T}\perp} \Omega_c \Phi_c^{\perp} > 0 \tag{12.112}$$

通过计算，我们定义

$$\Psi_c^{\perp} = \left[\begin{array}{cc|c|cc|c|ccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right] \begin{bmatrix} P^{-1} & & & & \\ & I & & & \\ & & I & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix} \tag{12.113}$$

$$\Phi_c^{\mathrm{T}\perp} = \left[\begin{array}{cc|c|cc|c|ccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (1-\rho)C^{\mathrm{T}\perp} & 0 & (1-\rho)C^{\mathrm{T}\perp} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\rho)D^{\mathrm{T}\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho D^{\mathrm{T}\perp} \end{array}\right] \tag{12.114}$$

和

$$\Psi_c^{\perp}\Omega_c\Psi_c^{\perp\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} Z & A & 0 & 0 & A_w & 0 & 0\\ A^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}}XE-Q & E^{\mathrm{T}}X_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & X_1^{\mathrm{T}}E & X_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0\\ A_w^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}>0 \quad (12.115)$$

$$\Phi_c^{T\perp}\Omega_c\Phi_c^{\perp}=\begin{bmatrix} I & \\ & \mathcal{M}(\rho)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & X_1 & 0 & XA & XA_w & 0 & 0\\ X_1^{\mathrm{T}} & X_2 & 0 & X_1^{\mathrm{T}}A & X_1^{\mathrm{T}}A_w & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & L & L_w & 0 & 0\\ A^{\mathrm{T}}X & A^{\mathrm{T}}X_1 & L^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}}XE & 0 & 0 & 0\\ A_w^{\mathrm{T}}X & A_w^{\mathrm{T}}X_1 & L_w^{\mathrm{T}} & 0 & \gamma^2 I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} I & \\ & \mathcal{M}^{\mathrm{T}}(\rho)\end{bmatrix}>0 \quad (12.116)$$

用 Schur 补引理，我们容易得到与 (12.115) 等价的下式

$$\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}}XE-Q-E^{\mathrm{T}}X_1X_2^{-1}X_1^{\mathrm{T}}E & & & & \\ & Q & & & \\ & & \gamma^2 I & & \\ & & & \gamma^2 I & \\ & & & & \gamma^2 I \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}\\ 0\\ A_w^{\mathrm{T}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}Z^{-1}[A\ 0\ A_w\ 0\ 0]>0 \quad (12.117)$$

考虑式 (12.107)，令

$$Y=Z^{-1}=X-X_1X_2^{-1}X_1^{\mathrm{T}} \quad (12.118)$$

在式 (12.117) 左右两边同时乘以 diag(Y, I, I) 并再次通过 Schur 补引理, 我们得到式 (12.98)。

再次通过 Schur 补引理并考虑式 (12.117) 和式

$$\begin{bmatrix} X & X_1 \end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} X^{\mathrm{T}}\\ X_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=X \quad (12.119)$$

我们得到式 (12.99)。

通过式 (12.105)~(12.107) 和式 (12.118) 证明不等式 (12.96)，(12.97)，(12.100) 和 (12.101) 成立。除此以外，满足 (12.96)~(12.101) 条件时，我们得到 $\hat{n}$ 维滤波器的所有参数的可行解 [18, 19]。结论得证。 □

标注 12.10 定理 12.1 提出了解决含丢包的离散奇异系统的降维 H_∞ 滤波问题的充分条件。需要指出的是不等式 (12.96)~(12.101) 是非凸的, 因为 (12.101) 中的变量 X 和 Y 是非线性的。幸运的是，文献 [20] 给出了解决这种非凸不等式的有效数学算法。把问题变成了求 H_∞ 模型问题的最优解，即

$$\min_{(X,\ Y,\ Q)} \quad \delta$$
$$\text{s.t. } (12.96) \sim (12.101), \quad \delta = \gamma^2$$

相应的最优 H_∞ 滤波性能 γ^* 满足 $\gamma^* = (\min \delta)^{\frac{1}{2}}$。

标注 12.11 由正交矩阵性质可知 $C^{\mathrm{T}\perp}$ 和 $D^{\mathrm{T}\perp}$ 可能不是唯一解。尽管 $C^{\mathrm{T}\perp}$ 和 $D^{\mathrm{T}\perp}$ 的值不同，但对非奇异线性转换的意义一致。即产生相同的最小 H_∞ 滤波 γ^*。当然如果 $C^{\mathrm{T}\perp}$ 和 $D^{\mathrm{T}\perp}$ 的值超过求可行解的范围，那么 $(X,\ Y,\ Q)$ 也不存在可行解。

标注 12.12 从定理 12.1 知矩阵 X_1, X_2, Φ, Υ, Θ 和 W 是不唯一的，这意味着降维滤波参数 $\{A_f,\ B_f,\ C_f,\ D_f\}$ 是不唯一的。这导致动态滤波器 (12.71) 不能保证最优的 H_∞ 性能 γ^*。幸运的是，文献 [17]、[19]、[21]、[22] 已经解决了这个问题。事实上，Υ, Θ 和 W 的选取要严格保证 $\Pi > 0$，Ξ 是实矩阵，滤波器才是稳定的。才能得到动态滤波器 (12.71) 最优的 H_∞ 性能 γ^*。而根据 (12.102) 中矩阵 X_1, X_2 选取合适的 Υ, Θ, W 使降维滤波参数 $\{A_f,\ B_f,\ C_f,\ D_f\}$ 满足要求的结果是不理想的[17,19,21,22]。

现在我们讨论零维 H_∞ 动态滤波问题 (12.91)。

根据引理 12. 2 和下面定理我们能够得到零维 H_∞ 滤波问题的解。

定理 12.4 如果存在矩阵 $X > 0$, $Q > 0$ 和 D_f 满足下式，则存在式 (12.76) 这样的零维 H_∞ 滤波器。

$$E^{\mathrm{T}}XE \geqslant 0 \tag{12.120}$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 & XA & 0 & XA_w & 0 & 0 \\ * & I & L-(1-\rho)D_fC & -\rho D_fC & L_w & -(1-\rho)D_fD & -\rho D_fD \\ * & * & E^{\mathrm{T}}XE-Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{12.121}$$

式 (12.76) 中的零维 D_f 参数可以通过寻找式 (12.120) 和式 (12.121) 中 $(X,\ Q,\ D_f)$ 的可行解得到。

标注 12.13 式 (12.120) 是式 (12.121) 凸约束，因此零维 H_∞ 滤波问题是找凸集可行解问题。即

$$\min_{(X,\ Q,\ D_f)} \quad \delta$$
$$\text{s.t. } (12.120) \sim (12.121), \quad \delta = \gamma^2$$

相应的 H_∞ 滤波性能 γ^* 和 $\gamma^* = (\min \delta)^{\frac{1}{2}}$。

12.2.3 数值例子

这部分我们通过实例证明提出方法的可行性。

式 (12.66) 和式 (12.67) 中的参数为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 1 \\ -1 & -0.3 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$
$$L = \begin{bmatrix} -3.2 & 0 & 3.2 \\ 3.2 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0 & 3.2 \end{bmatrix}, \quad L_w = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

具有丢包的 (12.68) 中的参数为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

例子的目的是设计式 (12.71) 形式的滤波器使滤波系统 (12.72) 是指数均方稳定并且可以得到最优 H_∞ 滤波性能 γ^*。

通过计算得到

$$\sigma(E,\ A) = \{0.6203,\ 0.4116\} \subset D_{\text{int}}(0,\ 1)$$

容易验证 $(E,\ A)$ 可行。现在，我们定义

$$C^{\mathrm{T}\perp} = [1 \quad -1 \quad 0], \quad D^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如标注 12.5 通过文献 [20] 中的算法解决非凸最小问题, 我们得到不同 ρ 值情况下的最优 H_∞ 滤波性能 γ^*，如图 12.2 所示。

ρ	1	0.8	0.5	0.3	0.1	0
γ^*	2.9774	1.1437	0.8008	0.3076	0.0029	0.0005

图 12.2 降维 H_∞ 性能

由图 1 知 γ^* 随着 ρ 的降低而降低。可知，丢包发生的概率越小 H_∞ 滤波性能越好。当 $\rho=0.5$, $\gamma^*=0.8008$ 时，得到

$$X=\begin{bmatrix} 15.4489 & -11.5673 & 3.4243 \\ -11.5673 & 29.1189 & -3.1003 \\ 3.4243 & -3.1003 & 2.1086 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} 8.1123 & -0.7779 & 3.4243 \\ -0.7779 & 12.3546 & -3.1003 \\ 3.3243 & -3.1003 & 2.1086 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 0.2526 & 0.5447 & 0.0049 \\ 0.5447 & 3.8346 & -1.2109 \\ 0.0049 & -1.2109 & 0.7789 \end{bmatrix}$$

当 $\rho=0.5$ 时，我们定义

$$C^{\mathrm{T}\perp}=[5\quad -5\quad 0],\quad D^{\perp}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

发现 γ^* 仍是 0.8008，相应解 $(X,\ Y,\ Q)$ 也相同。然而，如果我们定义

$$C^{\mathrm{T}\perp}=10^5\times[1\quad -1\quad 0],\quad D^{\perp}=10^5\times\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $(X,\ Y,\ Q)$ 的可行解找不到。

当 $\rho=0.5$, $\gamma^*=0.8008$ 时，得到

$$X-Y=\begin{bmatrix} 7.3366 & -10.7894 & 0 \\ -107894 & 16.7643 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\geqslant 0$$

即

$$\mathrm{rank}(X-Y)=2$$

因此, 我们定义

$$X_1=\begin{bmatrix} 2.7086 & 0 \\ -3.9834 & 0.9472 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

很容易得到 Φ 是满秩矩阵，我们定义 $\Phi_l\ \Phi_r=\Phi$。并且选取 $\Upsilon=\mathrm{diag}\{0.28,\ 0.28,\ 0.28, 0.28,\ 0.28\}$, $W=\mathrm{diag}\{0.049,\ 0.049, 0.049,\ 0.049,\ 0.049\}$, 根据定理 12.1，得到期望的降维滤波器

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}=\begin{bmatrix} -0.0476 & -0.0426 \\ -0.0421 & -0.1057 \end{bmatrix}\hat{x}_k+\begin{bmatrix} 0.0249 & -0.3677 & 0.0004 \\ -0.0108 & 0.0003 & 0.0001 \end{bmatrix}y_{ck} \\ \hat{z}_k=\begin{bmatrix} 0.0209 & -0.0011 \\ 0.0026 & -0.0107 \\ 0.1274 & 0.0413 \end{bmatrix}\hat{x}_k+\begin{bmatrix} -0.0411 & -0.1347 & 0.0139 \\ 0.1353 & -0.0087 & -0.0205 \\ 0.0646 & 0.0148 & -0.0567 \end{bmatrix}y_{ck} \end{cases}$$

由上面知滤波器是稳定的且动态系统满足 H_∞ 滤波性能 $\gamma = 0.8008$。

标注 12.9 阐述了怎样求解零维最优 H_∞ 滤波器的凸集优化问题。图 12.3 是不同 ρ 值情况下最优 H_∞ 滤波性能 γ^*。

ρ	1	0.8	0.5	0.3	0.1	0
γ^*	3.3379	1.6581	0.9663	0.6118	0.1109	0.0015

图 12.3　零维最优 H_∞ 滤波性能

当 $\rho = 0.5$, $\gamma^* = 0.9663$ 时，矩阵参数 X, Q 和 D_f 是

$$X = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0.0187 & -0.1495 & 0.0761 \\ -0.1495 & 1.5243 & -1.1984 \\ 0.0761 & -1.1984 & 1.3708 \end{bmatrix}, \quad Q = 10^6 \times \begin{bmatrix} 4.5020 & 4.3494 & 0.0763 \\ 4.3494 & 8.3575 & 2.0041 \\ 0.0763 & 2.0041 & 1.0402 \end{bmatrix}$$

$$D_f = \begin{bmatrix} -4.7997 & 7.6406 & 4.7997 \\ -0.0001 & 1.9203 & 0.0001 \\ -3.1999 & 6.2312 & 3.1999 \end{bmatrix}$$

从上面两图表，得到最优 H_∞ 性能 γ^* 随着滤波器维数增加而增加。结论见文献 [21]。

12.3 注　　记

本章由文献 [23]、[24] 改写而成。

12.4 习　　题

1. 考虑 (12.1) 中描述的系统，其系统参数描述如下：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.5 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad D = 0.4, \quad L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

假设系统的采样时间为 $\epsilon = 200\text{ms}$，时滞的上界为 $\tau = 500\text{ms}$，$d = 0.5$, $\rho = 0.9$, 求滤波器参数。

2. 考虑式 (12.66)~(12.68) 中描述的系统，其系统参数描述如下：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -0.6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad L_w = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

验证其是否可行。如果可行，按照 12.2 节方法，求出其降维滤波器。

参 考 文 献

[1] Fu M, Xie L. The sector bound approach to quantized feedback control. IEEE Trans. Autom. Control, 2005, 50: 1698–1711.

[2] Gao H, Chen T. H_∞ estimation for uncertain systems with limited communication capacity. IEEE Trans. Autom. Control, 2007, 52: 2070–2084.

[3] Mao X, Koroleva N, Rodkina A. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations. System and Control Letters, 1998, 35: 325–336.

[4] Yue D, Han Q. Robust H_∞ filter design of uncertain descriptor system with discrete and distributed delay. IEEE Trans. Siganl Pro., 2004, 52: 3200–3212.

[5] Xu S, Lam J, Zou Y. H_∞ filtering for singular systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 2003, 48: 2217–2222.

[6] Xu S, Dooren P, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. IEEE Trans. Autom. Control, 2002, 47: 1122–1128.

[7] Zhu S, Chen L, Feng J. Delay-dependent robust stability criterion and robust stabilization for uncertain singular time-delay systems. Proc. American Control Conference, 2005, 2839–2844.

[8] Gao H, Zhu S, Chen Z et al. Delay-dependent state feedback guaranteed cost control uncertain singular time-delay systems. Proc. Conf. Decision Control and Eurepean Control, 2003, 4354–4359.

[9] Fridman E, Shaked U. H_∞ control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. Linear Algebra and Its Applications, 2002, 351: 271–302.

[10] Wang H, Xue A, Lu R, et al. Wang. Delay-dependent robust stability stabilization for uncertain singular systems with time-varying delay. Proc. American Control Conference, 2008, 2839–2844.

[11] Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. IEEE Trans. Automat. Control, 2003. 48(12): 2163–2171.

[12] Seiler P, Sengupta, R. An H_∞ approach to networked control. IEEE Trans. Automat. Control, 2005. 50(3): 356–364.

[13] Yang F W, Wang Z, Hung Y S, et al. H_∞ control for networked systems with random communication delays. IEEE Trans. Automat. Control, 2006. 51(3): 511–518.

[14] Ray A. Output feedback control under randomly varying delays. Journal of guidance cotrol and dynamics, 1994. 17(4): 701–711.

[15] Wang Z, Ho D W, Liu X. Robust filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints. IEEE Trans. Circuits Syst. II, 2004. 51(6): 320–326.

[16] Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations. IEEE Trans. Automat. Control, 2004. 49(9): 1453–1464.

[17] Xu S, Lam J. Robust stability and stabilization of discrete singular systems: an equivalent characterization. IEEE Trans. Autom. Control, 2004. 49: 568–574.

[18] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. Int. J. Robust and Nonlinear Control, 1994, 4(4): 421–448.

[19] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problems: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994. 30(10): 1307-1317.

[20] Grigoriadis K M. Optimal H_∞ model reduction via linear matrix inequalities: continuous- and discrete-time cases, Systems & Contr. Lett., 1995. 26(2): 321-333.

[21] Grigoriadis K M, Watson J T. Reduced-order H_∞ and $L_2 - L_\infty$ filtering via linear matrix inequalities. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1997, 33: 1326–1338.

[22] Xu S Y, Lam J. Reduced-order H_∞ filtering for singular systems. Systems & Contr. Lett., 2007. 56(1): 48–57.

[23] Lu R, Xu Y. H-infinity filtering for singular systems with communication delays. Signal Processing, 2010, 90: 1240–1248.

[24] Lu R, Su H, Chu J, et al. Reduced-order H-infinity Filtering for Discrete-time Singular. IET Control Theory and Applications. 2009, 1-13, Systems with Lossy Measurements

(TP-4974.0101)



鲁棒控制基础理论


ISBN 978-7-03-029118-9

9 787030 291189 >

定价：45.00 元